ФЕЛИКС КЛЕЙН

ЭЛЕМЕНТАРНАЯ МАТЕМАТИКА
С ТОЧКИ ЗРЕНИЯ ВЫСШЕЙ

ЛЕКЦИИ, ЧИТАННЫЕ В ГЕТТИНГЕНСКОМ
УНИВЕРСИТЕТЕ

ТОМ ВТОРОЙ

ГЕОМЕТРИЯ

В обработке Е. Геллингера,
с добавлениями Фр. Зейфарта

Перевод с третьего немецкого издания
[redacted] А. Крыжановского

ОНТИ
ГОСУДАРСТВЕННОЕ
ТЕХНИКО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
МОСКВА 1934 ЛЕНИНГРАД

FELIX KLEIN

ELEMENTARMATHEMATIK
VOM HÖHEREN STANDPUNKTE AUS

Ausgearbeitet von E. HELLINGER

DRITTE AUFLAGE

ZWEITER BAND

GEOMETRIE

Für den Druch fertig gemacht und
mit zusätzen versehen von
FR. SEYFARTH

Mit 157 Abbildungen

BERLIN
VERLAG VON JULIUS SPRINGER
1925

ОГЛАВЛЕНИЕ

Стр.

IV. Классификация элементарных пространственных образов по их поведению при преобразованиях прямоугольных координат

V. Производные основных образов

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

I. Аффинные преобразования

II. Проективные преобразования

II. Основания геометрии

Стр.

О ПРЕПОДАВАНИИ ГЕОМЕТРИИ

I. Преподавание в Англии

II. Преподавание во Франции

III. Преподавание в Италии

IV. Преподавание в Германии

Стр.

Добавление I

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ О НЕКОТОРЫХ ВОПРОСАХ ЭЛЕМЕНТАРНОЙ ГЕОМЕТРИИ

Добавление II

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ О ПРЕПОДАВАНИИ ГЕОМЕТРИИ В ОТДЕЛЬНЫХ СТРАНАХ

ОТ РЕДАКТОРА ПЕРЕВОДА

К сказанному в предисловии редактора перевода первого тома и к характеристике содержания и формы изложения этого второго тома, содержащейся в предисловии самого автора, а также во введении, прибавить почти что нечего. Если в первом томе интереснейшие критические, методические, исторические соображения, замечания, сопоставления Клейна происходят на фоне фактов алгебры и анализа, в общем хорошо известных читателю с университетским математическим образованием, то здесь, во втором томе, обсуждаемые вещи в значительной части являются мало знакомыми такому читателю (если его знания ограничиваются университетскими воспоминаниями), особенно у нас в Союзе. Поэтому хотелось бы надеяться, что эти лекции, в которых так ярко сказывается наряду с широтой научных и педагогических горизонтов, глубиной и трезвостью творческой и критической мысли и специфически клейновскою способностью к координации, систематизации, взаимному переплетению разнообразнейшего материала, также и полная энергии и воли к действию, всегда бодрая и заражающая этой бодростью окружающих личность автора, — будут способствовать и у нас в самых широких слоях учительства и учащейся молодежи подъему интереса к геометрическим дисциплинам, одинаково прекрасным как внутреннею красотою построения, так и богатством приложений, и к проблематике наилучшего их преподавания.

Несколько слов о выполнении перевода. Клейн еще при жизни занял бесспорное место среди классиков науки. Математики-исследователи и педагоги (не только математики!) цитируют его, быть может, чаще, чем кого бы то ни было. С другой стороны, стиль Клейна всегда в высокой степени индивидуален, а в этом произведении, полном характеристик лиц, эпох и направлений, особенно отражает мощную темпераментность автора. Поэтому малейший перефраз оригинала всегда рискует исказить если не самую мысль, то нюанс, оттенок мысли автора Вот почему мы старались возможно ближе передавать текст до мелких деталей включительно, хотя бы и ценою, иной раз, тяжеловесности перевода. В тех редких случаях, где нам казалось желательным и допустимым вставить, ради большей ясности, лишнее слово или вариант оригинального выражения, мы помещали эти слова и варианты в квадратные скобки; более значительные наши вставки отнесены в подстрочные выноски и тоже заключены в квадратные скобки. Что касается передачи математических терминов, то возможно, что она не всегда встретит всеобщее одобрение, что неизбежно по причине редкого употребления части соответствующих понятий в русской математической литературе. В частности, термины Грассмана: Linienteil, Ebenenteil, Raumteil я передаю выражениями: „линейный элемент", „плоскостный элемент", „пространственный элемент", а не „часть линии" или „линейная часть" и т. д. (указав, впрочем, на такой буквальный перевод). Дело в том, что Клейна интересует в соответствующих местах не буква, а самая идея разбираемых вещей, что доказывается уже тем, что он сам часто вместо грассманова Linienteil говорит Vektor; слово же „элемент" казалось мне более подходящим здесь, чем „часть".

Ввиду того, что из рекомендуемой Клейном литературы лишь очень немногое существует в русском переводе (Вебер-Вельштейн, Энриквес, Адлер, Эрлангенская программа,...), считаю уместным обратить внимание читателя на ценную книгу проф. В. Ф. Кагана „Исторический очерк развития учения об основаниях геометрии" (Одесса 1907).

Нелегкую в общем работу по переводу этого тома мне отчасти облегчили мои бывшие ученики М. А. Неймарк и В. В Гуссов.

Почти тридцать лет минуло с тех пор, как я впервые подошел к знаменитому уже тогда профессору Феликсу Клейну с Anmeldungsbuch (зачетной книжкой) в руках. Пусть этот посильный труд переводчика-редактора явится скромным выражением чувства глубокой признательности незабвенному учителю.

Д. Крыжановский.

Одесса, 8 июля 1933 г.

ИЗ ПРЕДИСЛОВИЯ АВТОРА К ТРЕТЬЕМУ ИЗДАНИЮ

В соответствии с общим планом, развитым мною в предисловии к третьему изданию первого тома, относительно переиздания моих литографированных лекций, текст и изложение настоящего второго тома остались без перемен, если не считать небольших изменений в деталях и нескольких вставок. Оба прибавления, относящиеся к нерассмотренной в первоначальном тексте литературе научного и педагогического характера, были и на этот раз составлены, после повторных обсуждений со мною, г. Зейфартом (Seyfarth). Он же снова взял на себя наибольшую часть работы, связанной с изданием книги.

Ф. Клейн.

Геттинген, май 1925.

ПРЕДИСЛОВИЕ АВТОРА К ПЕРВОМУ ИЗДАНИЮ

В предисловии к первому тому настоящих лекций (арифметика, алгебра, анализ) я выразил сомнение в том, сможет ли второй том, посвященный геометрии, появиться так скоро. Однако его уже удалось обработать, в значительной степени благодаря энергии г. Геллингера, что я охотно отмечаю.

Относительно происхождения и цели всей этой серии лекций я не имею прибавить ничего особенного к тому, что было сказано в предисловии к первому тому. Но представляется, пожалуй, необходимым сказать несколько слов о новой форме, какую принял этот второй том.

Действительно, эта форма совершенно иная, чем в первом томе. Я решил дать, прежде всего, общий обзор всей области геометрии в том объеме, какой я считаю желательным для всякого учителя средней школы. Поэтому соображения, относящиеся к преподаванию геометрии, отошли на задний план; но зато они даны в связной форме в конце, поскольку оставалось место.

При описанном изменении в расположении материала в известной степени сыграло свою роль желание избежать повторения одной какой-нибудь слишком стереотипной формы. Но можно привести и более серьезные внутренние основания. Мы не имеем по геометрии таких цельных учебников, соответствующих общему состоянию науки, какими мы обладаем по алгебре и анализу, благодаря наличию служащих образцом французских Cours (курсов). Вместо этого мы встречаем изложение то одной, то другой стороны нашего многообъемлющего предмета в соответствии с их разработкой той или другой группой исследователей. В противоположность этому казалось, с точки зрения преследуемых мною педагогических и общенаучных целей, существенно важным попытаться дать более целостное суммарное изложение.

Заканчиваю пожеланием, чтобы оба уже теперь готовых взаимно дополняющих друг друга тома „Элементарной математики с точки зрения высшей" встретили в учительском мире то же дружеское внимание, как и лекции по вопросам организации преподавания математики, изданные в прошлом году г. Шиммаком (Schimmak) и мною.

Ф. Клейн.

Геттинген, Рождество 1908.

ВВЕДЕНИЕ

Уважаемые слушатели!

Курс, к чтению которого я сегодня приступаю, должен составить непосредственное продолжение и дополнение курса, прочитанного мною в последнюю зиму [1]). Теперь, как и тогда, моя цель заключается в том, чтобы все то, чем вы занимались в области математики за годы студенчества, поскольку оно может представить хотя бы какой-нибудь интерес для будущего учителя, свести воедино, а главное — разъяснить с точки зрения его значения для постановки школьного преподавания математики. Зимою я осуществил эту программу поочередно для арифметики, алгебры и анализа; в текущем семестре очередь за геометрией, которая тогда оставалась в стороне. При этом наши рассуждения должны быть понятны, конечно, и независимо от прошлого курса. Кроме того, я хочу несколько изменить также и самый тон всего курса в целом. На первом плане должен стоять теперь, — я бы сказал, — энциклопедический момент; вы должны получить обзор всей области геометрии, который даст вам готовые рамки для размещения в них всех отдельных сведений, приобретенных вами за время вашего обучения, чтобы держать их, таким образом, наготове для какого угодно употребления. И лишь после этого, сам собою, возникнет также и тот интерес к школьному преподаванию математики, который зимою всегда служил для меня исходным пунктом.

---

1) [Этот зимний курс (посвященный арифметике, алгебре и анализу) был издан в виде I т. этих лекций, сперва в *литографированном* (1908), а потом в *печатном виде*. Русский перевод этого I т. (Д. А. Крыжановского под редакцией В. Ф. Кагана) был издан впервые в 1911 г. (издательством „Матезис" в Одессе) под названием „Вопросы элементарной и высшей математики", т. I и в настоящее время переиздан ГТТИ. В дальнейших ссылках на „т. I" первое число указывает на страницу этого последнего русского издания ГТТИ, а второе (в скобках) на страницу упомянутого издания „Матезис".]

Охотно отмечу еще, что во время пасхальных каникул 1908 г. здесь, в Геттингене, состоялись **каникулярные курсы** для преподавателей математики и физики в старших классах. На этих курсах я сделал сообщение о моем зимнем курсе, и в связи с ним, а также с докладом профессора здешней гимназии Берендсена (Behrendsen), возникли очень интересные и живые прения по вопросу о реформе школьного обучения арифметике, алгебре и анализу и, в частности, о введении в школу диференциального и интегрального исчислений[1]). Участники курсов обнаружили при этом крайне отрадный интерес к этим вопросам, как и вообще к нашим стремлениям создать живую связь между университетом и школою. В направлении тех же стремлений должен воздействовать и мой теперешний курс. Будем надеяться, что он со своей стороны поможет устранению тех старых жалоб, которые нам постоянно — и, увы, часто вполне заслуженно — приходилось выслушивать со стороны школы: хотя университетское преподавание и дает много специальных знаний, тем не менее оно оставляет будущего учителя без всякой ориентировки относительно многих важных вещей общего характера, которыми он позже действительно мог бы воспользоваться.

Относительно **материала этих лекций** замечу только, что я, как и в моем прежнем курсе, вынужден буду предполагать, по мере надобности, что вам известны те основные понятия из всех областей математики, которые сообщаются обыкновенно в других курсах, чтобы иметь возможность сделать ударение на **обзоре целого**. При этом я буду, конечно, каждый раз стараться настолько помочь вашей памяти краткими указаниями, чтобы вы без труда смогли вполне ориентироваться в литературе. Но, с другой стороны, я буду, — тоже как и в первой части, — в гораздо большей степени, чем это обыкновенно делается, указывать на **историческое**

---

[1]) Ср. вольный реферат Шиммака „О постановке преподавания математики в духе новых реформаторских идей“ (R. **Schimmak**, Über die Gestaltung des mathematischen Unterrichts im Sinne der neueren Reformideen) в журнале „Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht“, Bd. 39, S. 513—527, 1908 (продается также в виде отдельного оттиска, Лейпциг 1908).

развитие науки, на достижения ее великих пионеров Такого рода разъяснениями я надеюсь содействовать, я бы сказал, вашему общему математическому образованию: наряду со знанием деталей, которое вы почерпаете из специальных курсов, должно занять место понимание логических и исторических связей целого.

Разрешите сделать еще одно, последнее, замечание общего характера, чтобы избегнуть недоразумения, которое иначе могло бы, пожалуй, возникнуть в связи с внешним отрывом этой „геометрической" части моих лекций от первой, „арифметической". Невзирая на этот отрыв, я выступаю здесь, как и вообще всегда в подобных курсах общего характера, поборником той тенденции, которую я охотнее всего обозначаю словами „фузионизм в преподавании арифметики и геометрии"[1]), понимая при этом „арифметику" в смысле, принятом в школе, т. е. как область, к которой принадлежат не только учение о целых числах, но и вся алгебра и анализ. Другие, особенно в Италии, пользуются словом „фузионизм" для характеристики стремлений, ограничивающихся одною только геометрией. Дело в том, что с давних пор принято как в школе, так и в университете сперва излагать геометрию плоскости, а затем уже, совершенно отдельно, геометрию пространства; но при этом, к сожалению, геометрию пространства часто слишком урезывают, и благородный орган пространственной интуиции, с которым учащиеся приходят в школу, хиреет. В противоположность этому, „фузионисты" хотят с самого начала одновременно трактовать плоскость и пространство, одну наряду с другим, чтобы не начинать с искусственного ограничения нашего мышления двумя измерениями. Я присоединяюсь здесь и к этим стремлениям, но в то же время

---

1) [В оригинале стоит: „Fusion der Arithmetik und Geometrie", т. е., буквально, „слияние (сплавление) арифметики и геометрии". Однако сам Клейн подчеркивает в других местах (см. начало заключительной главы), что „Fusion" он понимает не как полное слияние (Verschmelzen), а как устранение разрозненности (как переплетение, взаимное проникновение) двух дисциплин. К сожалению, однозвучный термин (фузия, фузионирование) не употребителен в русской литературе, а слово „фузионизм" (известное направление!) приложимо, разумеется, не к самим дисциплинам, а лишь к их преподаванию. Этим объясняется внешняя неточность нашего перевода.]

имею в виду, как сказано, еще дальше идущий фузионизм: в прошлом семестре я постоянно оживлял абстрактные теории арифметики, алгебры и анализа чертежами и графическими методами, которые делают для иного излагаемые вещи гораздо более доступными и часто впервые позволяют понять, зачем ими занимаются; аналогично этому, я буду теперь с самого начала сопровождать пространственную интуицию, которая, конечно, должна занимать первое место, аналитическими формулами, которые в высшей степени облегчают точную формулировку геометрических фактов.

Как именно все это надо понимать, вы лучше всего увидите, если я сразу же обращусь к нашему предмету; тут в первую очередь мы должны будем заняться рассмотрением ряда простых геометрических основных образов.

ПРОСТЕЙШИЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ОБРАЗЫ

I. ОТРЕЗОК, ПЛОЩАДЬ, ОБЪЕМ КАК ОТНОСИТЕЛЬНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

Вы видите уже из этого подзаголовка, что, следуя только что высказанному в общей форме намерению, я с самого начала одновременно трактую соответствующие друг другу величины на прямой, на плоскости и в пространстве. Но в то же время, в соответствии с более общей фузионистской тенденцией, мы для аналитической формулировки будем с самого начала принципиально пользоваться обычной п р я м о у г о л ь н о й с и с т е м о й к о о р д и н а т.

Начнем с о т р е з к а, лежащего на x-оси; если концы его имеют абсциссы x_1, x_2, то его д л и н а равна $x_1 - x_2$, и эту разность можно, очевидно, записать в виде такого определителя:

$$(1,\ 2) = x_1 - x_2 = \frac{1}{1}\begin{vmatrix} x_1 & 1 \\ x_2 & 1 \end{vmatrix}.$$

Совершенно аналогично, площадь треугольника, лежащего в плоскости x, y и образованного точками 1, 2, 3 с координатами x_1, y_1; x_2, y_2; x_3, y_3, равна:

$$(1,\ 2,\ 3) = \frac{1}{1\cdot 2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix},$$

и, наконец, для о б ъ е м а т е т р а э д р а с вершинами в точках 1, 2, 3, 4 с координатами x_1, y_1, z_1; . . . ; x_4, y_4, z_4 имеем выражение:

$$(1,\ 2,\ 3,\ 4) = \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix}$$

Обыкновенно говорят, что длина, площадь, объем равны *абсолютному значению* написанных здесь величин, между тем как в действительности наши формулы дают, кроме того, вполне *определенный знак* ($\pm$), зависящий от той последовательности, в которой даны точки. Примем за правило применять всюду также и в геометрии знаки ($\pm$), доставляемые аналитическими формулами; в соответствии с этим мы должны спросить себя, какое геометрическое значение может иметь тот или иной знак ($\pm$) при этих определениях величины геометрического образа.

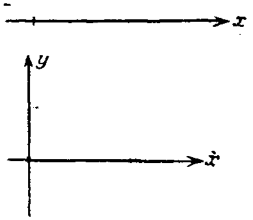

Рис. 1.

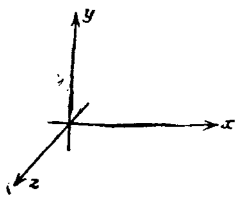

Рис. 2.

В этом вопросе имеет большое значение то, как мы выбираем *прямоугольную координатную систему*, и поэтому мы теперь же условимся раз навсегда придерживаться в этом отношении одного определенного (самого по себе, разумеется, произвольного) соглашения. В случае *одного измерения* будем всегда считать положительную x-ось направленною вправо. *На плоскости* будем положительную x-ось направлять вправо, а положительную y-ось — вверх (рис. 1); если бы последняя была обращена книзу, то получилась бы существенно отличная система координат, представляющая зеркальное отображение первой системы; эту вторую систему невозможно наложить на первую посредством одного только передвижения ее по плоскости, т. е. не выходя из плоскости в пространство. Наконец, пространственную систему координат считаем возникающей из нашей плоской системы путем присоединения к ней z-оси с положительным направлением вперед (рис. 2); принятие противоположного направления z-оси за положительное снова дало бы существенно отличную систему координат, которую никаким движением в пространстве невозможно было бы наложить на нашу систему[1]).

Придерживаясь постоянно этих соглашений, мы найдем истолкование наших знаков ($\pm$) в простых геометрических свойствах того чередования точек, какое обусловливается данной их нумерацией.

В случае отрезка (*1*, *2*) это свойство почти самоочевидно: выражение длины отрезка $x_1 - x_2$ получает положительное или отрицательное числовое значение в зависимости от того, лежит ли точка *1* справа или слева от точки *2*.

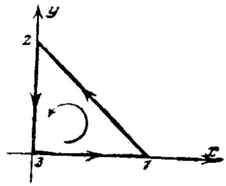

Рис. 3.

В случае треугольника находим, что формула дает для площади положительное или отрицательное значение в зависимости от того, направлен ли против или по часовой стрелке обход контура треугольника, ведущий от вершины *1* через вершину *2* к вершине *3*. Для доказательства мы вычислим сперва определитель, дающий площадь в случае одного специального, как можно удобнее расположенного треугольника, а затем разберем и общий случай, пользуясь идеей непрерывности. А именно: рассматриваем треугольник с вершиною *1* в „точке — единице“ (или „единичной“ точке — Einheitspunkt) x-оси ($x_1 = 1, y_1 = 0$), с вершиною *2* в точке — единице y-оси ($x_2 = 0$, $y_2 = 1$) и с вершиною *3* в начале координат ($x_3 = 0$, $y_3 = 0$). Согласно нашему условию относительно выбора системы координат, обход этого треугольника ($1 \to 2 \to 3$) направлен п р о т и в часовой стрелки (рис. 3), а наша формула дает для его площади положительное значение:

$$\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = +\frac{1}{2}.$$

---

[1]) Эти две системы различают как „правую“ (или правовращающую) и „левую“ (левовращающую), так как они соответствуют взаимному расположению трех растопыренных первых пальцев правой и левой рук (ср. т. I, стр. 99 [104]).

Непрерывно деформируя этот треугольник, можно его вершины перевести с вершины любого другого треугольника с тем же направлением обхода, не давая им при этом ни разу оказаться всем трем на одной прямой. При этом наш определитель будет изменяться тоже непрерывно; а так как он обращается в нуль, как известно, только в том случае, когда точки *1*, *2*, *3* лежат на одной прямой, то он будет во время этого процесса деформации сохранять положительное значение. Этим действительно доказано, что площадь всякого треугольника с направлением обхода, противоположным движению часовой стрелки, положительна. А поменяв местами две вершины исходного треугольника, увидим тотчас же, что для всякого треугольника, обходимого по часовой стрелке, наша формула дает отрицательную площадь.

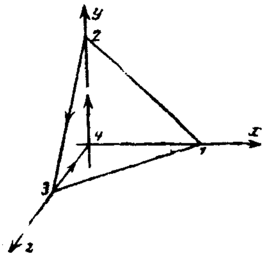

Рис. 4.

Совершенно аналогично можем поступить и в случае тетраэдра. Снова исходим из возможно удобнее расположенного тетраэдра: пусть первой, второй и третьей вершинами служат точки — единицы x-, y-, z-осей, а четвертой — начало координат (рис. 4). Его объем равен:

$$\frac{1}{6}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = +\frac{1}{6}.$$

Отсюда, как и раньше, следует, что всякий тетраэдр, какой только можно получить из этого исходного тетраэдра, непрерывно его деформируя, но не давая при этом ни разу всем четырем вершинам оказаться в одной плоскости (т. е. не давая определителю обратиться в нуль), имеет положительный объем.

Все такие тетраэдры можно охарактеризовать тем направлением обхода, какой имеет треугольная грань (*2*, *3*, *4*), рассматривая ее со стороны вершины *1*. Это приводит к такому результату: объем тетраэдра (*1*, *2*, *3*, *4*), определяемый по нашей формуле, получается положительный, если вершины *2*, *3*, *4*, рассматриваемые из вершины *1*, следуют одна за другой против часовой стрелки; в противном случае получаем отрицательный объем.

Таким образом мы, действительно, из аналитических формул вывели геометрические правила, позволяющие каждому отрезку, каждому треугольнику, каждому тетраэдру приписывать определенный знак, если только их вершины заданы в определенной последовательности.

Этим, действительно, достигаются большие преимущества по сравнению с обычной элементарной геометрией, рассматривающей длину, площадь и часто объем как абсолютные величины, а именно, мы будем в состоянии устанавливать простые теоремы общего характера тогда, когда элементарная геометрия должна различать многочисленные случаи в зависимости от того или другого вида фигур.

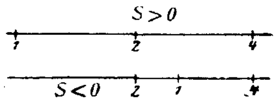

Рис. 5.

Разрешите мне начать с одного очень примитивного примера, а именно с „простого отношения“ (Schnittverhälnis) трех точек на одной прямой, например, на x-оси.

Если обозначить эти три точки через *1*, *2* и *4* (рис. 5), что является для последующего наиболее удобным, то их „простое отношение“ дается формулой:

$$S = \frac{x_1 - x_2}{x_1 - x_4}.$$

Это отношение оказывается, очевидно, положительным или отрицательным, смотря по тому, лежит ли точка *1* вне или внутри отрезка (*2*, *4*).

Если известно, как это обыкновенно бывает при элементарном изложении, лишь абсолютное значение

$$|S| = \frac{(x_1 - x_2)}{(x_1 - x_4)},$$

то нужно всегда дать еще чертеж или пояснить словами, имеют ли в виду внутреннюю или внешнюю точку, а это уж, конечно, вносит значительное усложнение. Таким образом, **введение знака** ($\pm$) **учитывает различ-**

ные возможные случаи расположения точек на прямой, — обстоятельство, которое нам придется еще часто отмечать в наших лекциях.

Присоединяя четвертую точку *3*, мы можем составить так называемое „двойное“ (или „ангармоническое“) отношение четырех точек:

$$D = \frac{x_1 - x_2}{x_1 - x_4} : \frac{x_3 - x_2}{x_3 - x_4} = \frac{(x_1 - x_2)(x_3 - x_4)}{(x_1 - x_4)(x_3 - x_2)}.$$

Это выражение также имеет определенный знак, а именно, как непосредственно видно, $D < 0$, если обе пары точек *1*, *3* и *2*, *4* разделяют одна другую, и $D < 0$ в противоположном случае, т. е. когда обе точки *1* и *3* одновременно лежат вне или внутри отрезка *2*, *4* (рис. 6 и рис. 7). Таким образом снова получаем каждый раз два

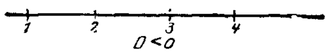

Рис. 6.

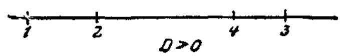

Рис. 7.

существенно различные расположения, дающие для D одно и то же абсолютное значение. Задавая лишь последнее, мы должны еще каждый раз отчетливо указать, как именно расположены четыре точки; если, например, определяют „гармонические точки“ равенством $|D| = 1$, как все еще, к сожалению, чаще всего поступают в школе, то к этому определению неизбежно приходится прибавлять требование о раздельном положении обеих пар точек, тогда как нам достаточно одного лишь требования: $D = -1$.

Особенно полезным оказывается считаться со знаком в проективной геометрии, где, как известно, двойное отношение играет основную роль.

Известное предложение проективной геометрии гласит: четыре точки одной прямой имеют такое же двойное отношение, как и четыре точки любой другой прямой, получаемые из первых проектированием их из произвольного центра (перспектива) (рис. 8).

Если рассматривать двойное отношение как относительную величину, имеющую определенный знак, то имеет место также следующая обратная теорема, не допускающая исключений:

Две четверки точек на двух прямых, имеющие равные двойные отношения D, всегда могут быть получены одна из другой путем однократного или повторного перспективного преобразования. Так, например, на рис. 8 четверки $1, 2, 3, 4$ и $1', 2', 3', 4'$ получаются одна из другой проектированием из центров P и P'. Если же известно только абсолютное значение D, то соответствующая теорема перестает быть справедливой в столь простой форме; в этом случае нужно еще прибавить особое предположение, касающееся взаимного расположения точек.

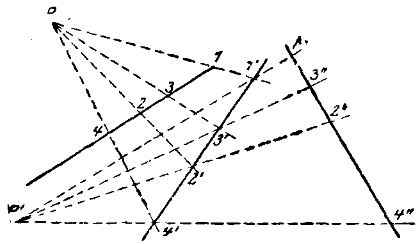

Рис. 8.

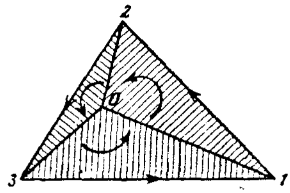

Рис. 9.

Еще более плодотворными оказываются применения нашей формулы, дающей площадь треугольника. Возьмем прежде всего где-либо внутри треугольника $(1, 2, 3)$ точку O и соединим ее с вершинами (рис. 9). Рассматривая площади полученных треугольников как абсолютные величины, находим, что их сумма равна площади исходного треугольника:

$$|(1, 2, 3)| = |(0, 2, 3)| + |(0, 3, 1)| + |(0, 1, 2)|.$$

На нашем рисунке вершины, взятые в указанном здесь порядке, всегда следуют одна за другой против часовой стрелки, так что площади треугольников $(1, 2, 3)$, $(0, 2, 3)$, $(0, 3, 1)$, $(0, 1, 2)$ получают согласно нашему общему определению знак (плюс).

Поэтому мы можем нашу формулу написать еще и таким образом:

$$(1, 2, 3) = (0, 2, 3) + (0, 3, 1) + (0, 1, 2).$$

Теперь я утверждаю, что эта самая формула имеет место и в том случае, когда точка O лежит вне треугольника, и вообще, когда $0, 1, 2, 3$ — четыре произвольные точки на плоскости. В самом деле, например, при расположении точек, указанном на рис. 10, обход треугольников $(0, 2, 3)$ и $(0, 3, 1)$ происходит против часовой стрелки, а треугольника $(0, 1, 2)$ — по часовой стрелке, так что наша формула дает для абсолютных величин площадей равенство:

$$|1, 2, 3| = |0, 2, 3| + |0, 3, 1| - |0, 1, 2|,$$

в справедливости которого легко убедиться из нижеследующего рисунка.

Мы докажем наше утверждение в общем виде, исходя из аналитического определения, причем в нашей формуле мы узнаем известное предложение из алгебры, а именно, из теории определителей. Ради большего удобства примем точку O за начало координат ($x = 0$, $y = 0$), что, очевидно, не вносит существенного нарушения общности, — и заменим площади четырех треугольников соответствующими детерминантами; тогда, опуская всюду множитель $\frac{1}{2}$, мы должны будем доказать, что для произвольных значений $x_1, \ldots, y_3$ имеет силу соотношение:

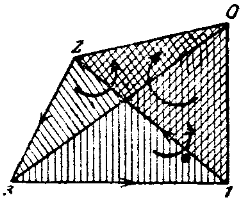

Рис. 10.

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix}.$$

Величина каждого из определителей справа не изменится, если второй и третий элементы (1) последней колонны заменить нулями, ибо эти элементы при разложении по минорам первой строки входят в те два минора, которые умножаем на нуль; если, кроме того, в двух последних определителях произведем циклическую перестановку строк (что допустимо в определителях третьего и вообще нечетного порядка), то можем наше равенство записать таким образом:

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ x_2 & y_2 & 0 \\ x_3 & y_3 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ x_3 & y_3 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 0 \\ x_2 & y_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Но это — тождество: справа имеем попросту миноры [1]) последней колонны левого определителя, так что перед нами лишь известное разложение этого последнего определителя по элементам одной из его колонн. Этим наше предложение сразу доказано для всех возможных расположений четырех точек.

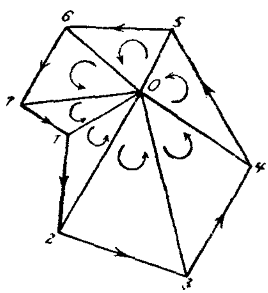

Рис. 11.

Эту форму мы можем сейчас же обобщить так, чтобы она давала **площадь произвольных многоугольников**. Для наглядности рассмотрим такую геодезическую задачу: требуется определить площадь участка земли с прямолинейными сторонами, зная на основании измерений координаты его вершин *1*, *2*, ..., $n-1$, n (рис. 11).

Кто не привык оперировать со знаками $\pm$ при площадях, тот должен сделать набросок многоугольника по этим данным, разложить его, например, диагоналями на треугольники, а затем, в зависимости от его особого вида, — в особенности от того, какие именно углы являются входящими, — определить искомую площадь как сумму или разность площадей отдельных треугольников. Мы же можем сразу написать общую формулу, которая совершенно автоматически даст правильный результат, не требуя никакого чертежа. Если O — какая-либо точка плоскости, например начало координат, то площадь

[1]) [Клейн придерживается менее употребительной терминологии, понимая под „минором" какого-нибудь элемента то, что обычно называют его „алгебраическим дополнением".]

нашего многоугольника, при обходе его вершин в после довательности $1, 2, \ldots, n$, равна

$$(1, 2, 3, \ldots, n) = (0, 1, 2) + (0, 2, 3) + \ldots + (0, n-1, n) + (0, n, 1),$$

где треугольники следует брать со знаками, определяемыми указанным направлением обхода. Эта формула дает положительную или отрицательную площадь, смотря по тому, движемся ли мы, обходя многоугольник, в порядке $1, 2, \ldots, n$ против часовой стрелки или по стрелке. Мы ограничимся указанием на эту формулу, а доказательство вы можете провести сами.

Я охотнее остановлюсь еще на нескольких особенно интересных случаях, которые, конечно, не могут иметь места при измерениях на местности, а именно, на многоугольниках, перекрывающих самих себя (налагающихся на самих себя), каков, например, вот этот четырехугольник (рис. 12). Если вообще мы хотим говорить здесь об определенной площади, то это может быть только то ее значение, которое дает наша формула; мы должны только уяснить себе геометрический смысл этого значения. Прежде всего легко убедиться в том, что это значение не зависит от особого положения точки O[1]).

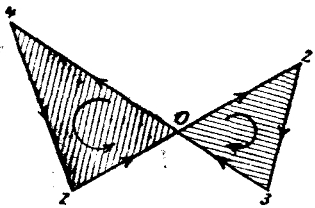

Рис. 12.

---

[1]) Пусть точка O имеет координаты x, y. Площадь многоугольника $1, 2, 3, \ldots, n$), определяемая формулой

$$(1, 2, 3, \ldots, n) = (0, 1, 2) + (0, 2, 3) + \ldots + (0, n, 1),$$

является некоторой функцией этих координат $f(x, y)$. Чтобы доказать независимость величины этой площади от выбора точки O, достаточно показать, что

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = 0$$

(тождественно). Но

$$f(x, y) = \sum_{k=1}^{k=n} (0, k, k+1) = \sum \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_k & y_k & 1 \\ x_{k+1} & y_{k+1} & 1 \end{vmatrix},$$

Поэтому, если поместить точку O по возможности удобнее, а именно в ту точку, где стороны четырехугольника перекрывают одна другую, то треугольники $(0, 1, 2)$ и $(0, 3, 4)$ станут нулями, и останется

$$(1, 2, 3, 4) = (0, 2, 3) + (0, 4, 1);$$

первый треугольник имеет отрицательную, второй — положительную площадь. Следовательно, площадь нашего перекрывающего самого себя четырехугольника, при направлении обхода $(1, 2, 3, 4)$, равна абсолютной величине площади его части $(0, 4, 1)$, обходимой против часовой стрелки, без абсолютной величины части $(0, 2, 3)$, обходимой по часовой стрелке.

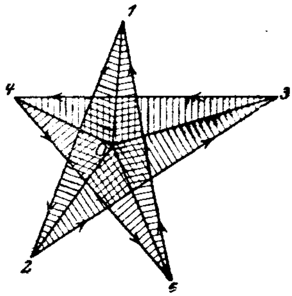

Рис. 13.

В качестве второго примера рассмотрим изображенный здесь звездчатый пятиугольник (рис. 13). Если поместить точку O в средней части, то в сумме

$$(0, 1, 2) + (0, 2, 3) + \ldots + (0, 5, 1)$$

все отдельные треугольники получают положительный обход; их сумма дважды покрывает площадь внутреннего пятиугольного ядра, а каждый из пяти уголков (хвостов) по одному разу. Если снова обратимся к однократному обходу многоугольника $(1, 2, 3, 4, 5, 1)$, то увидим, что каждую часть приходится обходить против часовой стрелки, а именно те части, которые при определении площади считаются дважды, обходим дважды, а те, которые считаются по одному разу, обходим также один раз.

где $(n + 1)$ надо заменить через единицу. Поэтому

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \sum \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x_k & y_k & 1 \\ x_{k+1} & y_{k+1} & 1 \end{vmatrix} = \sum (y_k - y_{k+1}) = 0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \sum \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ x_k & y_k & 1 \\ x_{k+1} & y_{k+1} & 1 \end{vmatrix} = -\sum (x_k - x_{k+1}) = 0.$$

Изучение этих двух примеров приводит нас к следующему общему правилу: для каждого прямолинейного многоугольника, сколь угодно часто перекрывающего самого себя, наша формула дает в качестве площади алгебраическую сумму отдельных площадок, ограничиваемых контуром многоугольника, причем каждую площадку следует считать столько раз, сколько раз описываем ее при однократном обходе периметра (*1*, *2*, *3*, ..., *n*, *1*), а именно, каждый раз со знаком плюс или минус, смотря по тому, происходит ли обход ее против часовой стрелки или по часовой стрелке. Желательно, чтобы вы сами дали общее доказательство справедливости этого правила; при этом вы не встретите никаких затруднений. Тем более рекомендую я вам вполне усвоить на отдельных примерах эти интересные формулы для площадей.

Перейдем теперь от многоугольников к криволинейно ограниченным площадям. Итак, мы рассматриваем какую-либо замкнутую кривую, которая, кроме того, сколь угодно часто может пересекать самое себя; мы приписываем ей определенное направление обхода и спрашиваем, какую площадь она ограничивает. Конечно, мы найдем эту площадь, аппроксимируя кривую (рис. 14) многоугольниками с очень большим числом весьма малых сторон и отыскивая предел суммы площадей этих многоугольников, определяемых только что указанным образом. Если $P(x, y)$ и $P_1(x+dx,\ y+dy)$ — две соседние вершины такого аппроксимирующего нашу кривую многоугольника, то его площадь составится из суммы элементарных треугольников $(O,\ P,\ P_1)$, т. е. исключительно из слагаемых вида:

$$\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ x & y & 1 \\ x+dx & y+dy & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}(x\,dy - y\,dx).$$

В пределе эта сумма переходит в криволинейный интеграл

$$\frac{1}{2}\int(x\,dy - y\,dx),$$

взятый вдоль нашей кривой в указанном направлении; это дает нам определение площади, ограничиваемой нашей кривой. Чтобы дать геометрическое толкование этого определения, можно перенести на этот новый случай результат, высказанный нами для многоугольников: каждая, заключенная внутри кривой, площадка входит в интеграл столько раз со знаком плюс и столько раз со знаком минус, сколько раз она описывается соответственно против или по часовой стрелке, при однократном обходе всей кривой в заданном направлении.

В случае простой кривой, подобной изображенной на рис. 14, этот интеграл дает поэтому в точности ограничиваемую этой кривой площадь со знаком плюс.

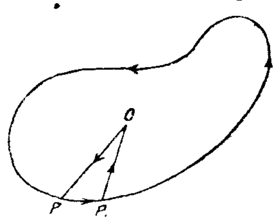

Рис. 14.

На рис. 15 внешняя часть считается один раз, а внутренняя — два раза со знаком плюс; на рис. 16 левая часть получает знак минус, а правая — знак плюс, так что в общем получается отрицательная площадь; на рис. 17 одну часть совсем не приходится брать в расчет, так как для нее получается один раз положительный, а другой раз отрицательный обход. Конечно, таким образом могут возникнуть и кривые с площадью, равной нулю, если бы, например, кривая на рис. 16 была

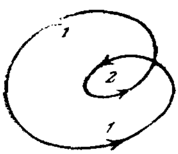

Рис. 15.

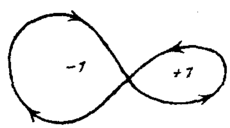

Рис. 16.

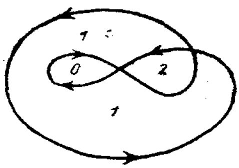

Рис. 17.

симметрична относительно точки пересечения; этот случай не представляет сам по себе ничего нелепого, если принять во внимание, что все определение площади покоится исключительно на целесообразных соглашениях.

Чтобы показать вам, насколько целесообразным является введение этих понятий, я опишу теперь **полярный планиметр Амслера**.

Этот чрезвычайно остроумный, очень часто применяемый на практике аппарат, сконструированный в 1854 г. механиком Якобом Амслером в Шафгаузене (Швейцария), выполняет определение площадей как раз в духе изложенных выше идей.

Начну с изложения теоретического принципа конструкции.

Сообщим штанге A_1A_2 (рис. 18) длиною l такое перемещение по плоскости, чтобы каждый из ее концов A_1 и A_2 описал замкнутую кривую, а сама штанга возвратилась в свое исходное положение.

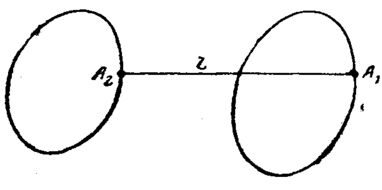

Рис. 18.

Наша цель — определить площадь той части плоскости, по которой проходит (какую „описывает") при своем движении наша штанга. При этом будет вполне естественным считать отдельные части этой площади положительными или отрицательными, смотря по тому, описываются ли они штангой в одном или в другом направлении, руководясь при этом нижеизложенным правилом. А именно, непрерывное движение штанги заменяем последовательностью произвольно малых скачкообразных „элементарных движений" (из положения *1 2* в соседнее *1' 2'*) соответственно тому предельному переходу, какой выполняют при каждом интегрировании.

Тогда искомая площадь окажется равною пределу суммы площадей всех „элементарных четырехугольников" (*1', 1, 2', 2*), описываемых при этих элементарных движениях. При этом, как легко видеть, для правильного учета направления движения штанги следует каждый элементарный четырехугольник брать со знаком, соответствующим направлению обхода *1, 1', 2', 2*.

Каждое „элементарное движение" штанги A_1A_2 можно разложить на такие три составляющих движения (рис. 19):

1. Сдвиг в д о л ь самой штанги на отрезок ds.
2. Сдвиг по перпендикуляру к штанге на отрезок dp.
3. Поворот вокруг вершины A_2 на угол $d\varphi$.

При этом будут описаны соответственно площади $O \cdot ds$, $l \cdot dp$, $\frac{l^2}{2} d\varphi$; площадь „элементарного четырехугольника" (*1*, *1'*, *2'*, *2*) можно будет просто заменить суммой этих площадей, ибо совершаемые при этом ошибки, будучи высшего порядка, исчезают при предельном переходе (который ведь является простым процессом интегрирования).

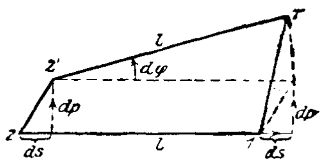

Рис. 19.

Существенным является то, что эта сумма

$$l \cdot dp + \frac{l^2}{2} d\varphi$$

совпадает также и по знаку с площадью четырехугольника (*1*, *1'*, *2'*, *2*), если только считать $d\varphi$ положительным при вращении против часовой стрелки, а dp — положительным при сдвиге в сторону возрастания φ.

Отсюда интегрирование по всему пути движения дает для всей площади, описанной штангой A_1A_2, такое выражение:

$$J = l\int dp + \frac{l^2}{2}\int d\varphi.$$

Здесь $\int d\varphi$ выражает собою весь угол, на который повернулась штанга относительно своего исходного положения. А так как мы ее возвращаем, в конце концов, в ее исходное положение, то $\int d\varphi = 0$, если только в процессе движения она не делает ни одного полного оборота. Поэтому вся площадь сводится к

$$J = l\int dp. \tag{1}$$

Если же штанга, прежде чем вернуться в исходное положение, делает один или несколько полных оборотов, что вполне возможно при подходящем виде кривых, описываемых A_1 и A_2, то $\int d\varphi$ равен некоторому кратному 2π. Поэтому для каждого полного оборота в положительном направлении следует прибавить к правой части равенства по $+l^2\pi$, а для каждого полного оборота в отрицательном направлении по $-l^2\pi$. Однако мы для простоты оставим в стороне это маленькое усложнение.

Но эту самую площадь J можно определить еще и несколько иным способом (рис. 20). Пусть штанга при последовательных элементарных движениях принимает поочередно положения $1\ 2$, $1'\ 2'$, $1''\ 2''$, ...; тогда J окажется равным сумме элементарных четырехугольников:

$$J = (1, 1', 2', 2) + (1', 1'', 2'', 2) + (1'', 1''', 2''', 2'') + \ldots,$$

или, выражаясь точнее, равным интегралу, представляющему собой предел этой суммы. При этом каждый элементарный четырехугольник следует брать, как и раньше, с определенным, указанным здесь направлением обхода. Выбирая теперь как-нибудь начало координат O и применяя установленную нами выше формулу для многоугольника, можем написать:

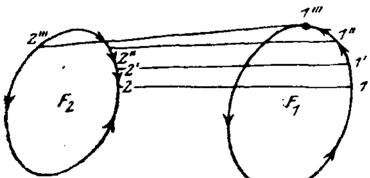

Рис. 20.

$$\begin{aligned} J = {} & (0, 1, 1') + (0, 1', 2') + (0, 2', 2) + (0, 2, 1) + \\ & + (0, 1', 1'') + (0, 1'', 2'') + (0, 2'', 2) + (0, 2', 1') + \\ & + (0, 1'', 1''') + (0, 1''', 2''') + (0, 2''', 2'') + (0, 2'', 1'') + \\ & + \ldots \end{aligned}$$

Здесь второе слагаемое каждой строки взаимно уничтожается с четвертым слагаемым следующей строки, так как эти слагаемые дают площадь равных, но обходимых в противоположном направлении треугольников. Например, $(0, 1', 2') = -(0, 2', 1')$, $(0, 1'', 2'') = -(0, 2'', 1'')$, ... Кроме того, так как ряд элементарных четырехугольников конечен, то второе слагаемое последней строки $(0, 1, 2)$ взаимно уничтожается с последним слагаемым $(0, 2, 1)$ первой строки. Таким образом в каждой строке остаются только первые и третьи треугольники; но все первые треугольники дают в сумме, согласно той же формуле, многоугольник $(1, 1', 1'', 1''', \ldots)$, т. е. в пределе площадь F_1 кривой, описываемой концом A_1 штанги. Точно так же, меняя знак каждого третьего слагаемого, получим в сумме многоугольник $(2, 2', 2'', 2''', \ldots)$, т. е. в пределе площадь F_2 кривой, описываемой концом A_2. Итак, окончательно получаем:

$$J = F_1 - F_2, \tag{2}$$

причем каждая кривая может, очевидно, как угодно пересекать сама себя; нужно только при определении F_1 и F_2 точно придерживаться нашего правила знаков.

В формулах (1) и (2) заключается геометрическая теория планиметра. А именно, если ввести „подвижной штифт" A_1 по кривой, заключающей искомую площадь F_1, позволяя в то же время точке A_2 двигаться только по замкнутой кривой с известной нам площадью F_2 [1]), то мы определим площадь F_1 по формуле:

$$F_1 = F_2 + l\int dp, \tag{2'}$$

вытекающей из (2), если только будем иметь приспособление, измеряющее $\int dp$.

Механической частью изобретения Амслера и является такого рода приспособление, состоящее в том, что на штангу A_1A_2, как на ось, насажен ролик, который при движении штанги катится по бумаге. Пусть λ есть его расстояние от A_2, а ρ — его радиус (рис. 21). Полный угол ψ, на который ролик повернется во время движения штанги, составится, как из слагаемых, из поворотов $d\psi$, соответствующих элементарным движениям; а каждый такой поворот $d\psi$ можно, в свою очередь, рассматривать как сумму трех поворотов $d\psi_1$, $d\psi_2$, $d\psi_3$, соответствующих тем трем простым движениям, из которых мы выше составляли каждое элементарное движение штанги (стр. 31).

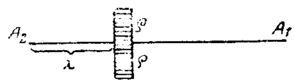

Рис. 21.

[1]) [Конечно, обе точки A_1 и A_2 должны одновременно описать полностью кривые F_1 и F_2.]

При продольном сдвиге „1“ ролик не будет вращаться: $d\psi_1 = 0$; при поперечном сдвиге „2“ штанги A_1A_2 нормально к ней же на dp ролик прокатится на отрезок $dp = \rho\, d\psi_2$, так что $d\psi_2 = \frac{1}{\rho}\, dp$; наконец, при вращении „3“ вокруг A_2 на угол $d\varphi$ ролик прокатится на длину $\lambda\, d\varphi = \rho\, d\psi_3$, так что $d\psi_3 = \frac{\lambda}{\rho}\, d\varphi$. Итак, окончательно получаем:

$$d\psi = \frac{1}{\rho}\, dp + \frac{\lambda}{\rho}\, d\varphi.$$

Если A_1A_2 возвращается в исходное положение, не делая ни одного полного оборота, так что при интегрировании по всему пути $\int d\varphi = 0$, то полный угол поворота амслерова ролика окажется равным

$$\psi = \frac{1}{\rho} \int dp. \tag{3}$$

Если бы штанга совершила один или несколько полных оборотов, то в правую часть этой формулы вошло бы еще соответствующее кратное числа $2\pi \frac{\lambda}{\rho}$, но мы, как и выше, оставляем в стороне этот случай.

На основании формул (2′) и (3) мы окончательно получаем:

$$F_1 - F_2 = l \cdot \rho \cdot \psi,$$

т. е. разность между площадями кривых, описываемых концом штанги, измеряется углом ψ поворота ролика.

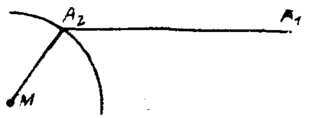
Рис. 22.

При изготовлении этого инструмента оказывается целесообразным сделать площадь F_2 равной нулю. Амслер достигает этого превосходным в конструктивном отношении способом, поместив A_2 на конце шатуна, который может вращаться вокруг неподвижной точки M (рис. 22). Благодаря этому A_2 может только передвигаться взад и вперед по окружности и потому не описывает никакой площади, если не считаться с тем возможным усложнением, когда точка A_2 обходит один или даже несколько раз окружность в том или другом направлении. Этому „полюсу“ M полярный планиметр и обязан своим названием.

Применение аппарата сводится к тому, что „подвижным штифтом“, помещенным в точке A_1, обводят измеряемую площадь, отсчитывают на ролике угол ψ и вычисляют описанную площадь по формуле:

$$F_1 = l \cdot \rho \cdot \psi.$$

Константу аппарата $l\rho$ определяют измерением известной уже площади, например площади квадрата со стороной единица.

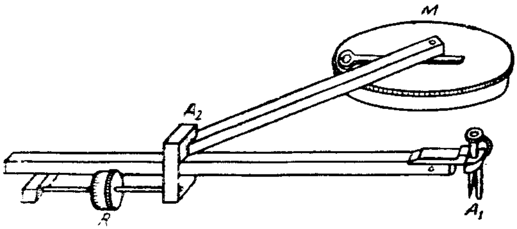

Рис. 23.

Вы видите здесь изображение полярного планиметра (рис. 23). Конечно, для того чтобы как следует разобраться в этом аппарате, вы должны видеть его и попробовать работать им. Чтобы аппарат функционировал надежным образом, он должен, конечно, иметь несколько более сложное устройство, чем этого требует одна лишь теория прибора. Ограничусь в этом отношении немногими указаниями: точка M прикреплена к тяжелому предмету и соединена штангой с точкой A_2. Теоретически важной штангой A_1A_2, о которой мы все время говорили, является не тот второй металлический стержень, который вы видите в аппарате, но параллельное этому стержню воображаемое продолжение оси укрепленного рядом с ним ролика, проходящее через подвижной штифт A_1. Последний сопровождается еще параллельным ему тупым штифтом, который служит для того, чтобы не давать острию A_1

вонзаться в бумагу. Ролик снабжен нониусом для более точного отсчета углов, а также маховичком для определения числа полных оборотов.

Я не стану больше останавливаться на подробностях; вместо этого я хотел бы высказать следующее предостережение общего характера.

Изучая теорию подобных аппаратов, не пренебрегайте вопросами действительного практического их осуществления. К такому пренебрежению, к сожалению, часто бывает слишком склонен чистый математик, а такую односторонность так же трудно оправдать, как и противоположную крайность того механика, который, не интересуясь теорией, тонет в конструктивных деталях. Тут именно прикладная математика и должна явиться связующим звеном. В частности она должна учесть то, что в действительности никакой аппарат никогда точно не соответствует теоретической формулировке принципа. Ибо, например, шарниры всегда немного шатаются, ролик не только катится, но и скользит по бумаге, наконец, сама чертежная бумага не представляет собою идеальной плоскости, а также никогда нельзя вполне точно вести штифт вдоль данной кривой. Конечно, для практики чрезвычайно важно то, в какой именно мере оказывают влияние подобные моменты и до какого знака может быть точен результат, который отсчитывается на ролике, а это и должно составить предмет исследования прикладной математики.

В связи с этим отступлением я хочу указать, чем настоящий курс должен отличаться от двух прежних моих курсов сходного названия, которые также изданы в литографированном виде: „Приложение диференциального и интегрального исчислений к геометрии, ревизия принципов" (летний семестр 1901; обработано Мюллером (C. H. Müller)[1]) и „Введение в высшую геометрию" (зимний семестр 1892/93 г. и летний семестр 1893 г.; в обработке Шиллинга (Fr. Schilling)[2]).

[1]) Переиздано в виде III т. настоящего издания „Элементарной математики".

[2]) Vorlesungen über höhere Geometrie, 3. Aufl., bearb. von W. Blaschke, 1926.

А именно: в первом курсе выдвинуто на передний план только что затронутое различие между абстрактной и практической геометрией; как раз тогда в семинаре был прочитан доклад об источниках ошибок при работе с полярным планиметром Амслера.

Наоборот, во втором курсе я далеко пошел в построении абстрактной геометрической теории, соответственно потребностям специалиста, который хочет самостоятельно работать в этой области в духе современного исследования. В настоящем же курсе я имею в виду нечто третье: я хотел бы представить вам то, что можно было бы назвать элементарно-теоретической частью геометрии, то, что безусловно должен был бы знать каждый кандидат на учительское звание, в том числе вещи, имеющие основное значение для применения в механике и в физике; о вещах же, принадлежащих к упомянутым первым двум областям, я смогу лишь при случае кратко упоминать.

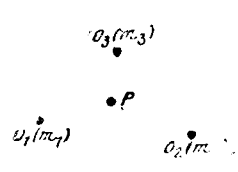

Рис. 24.

Возвращаясь снова к нашим общим исследованиям о площадях и объемах, я начну со следующей исторической справки. Я назову вам человека, впервые последовательно применившего принцип знаков в геометрии — великого геометра Мёбиуса (A. F. Möbius) в Лейпциге. Этот решительный успех осуществлен в его юношеском произведении 1827 г.: „Барицентрическое исчисление“[1]. Это одно из тех сочинений, которые вообще легли в основу новой геометрии. Чтение его уже благодаря одному только прекрасному изложению доставляет особенное удовольствие. Название связано с тем, что Мёбиус с самого начала оперирует с центрами тяжести. А именно: пусть в каких-нибудь трех неподвижных точках O_1, O_2, O_3 на плоскости помещаются три массы m_1, m_2, m_3 (рис. 24), которые, как, например, в случае электрических зарядов, могут быть и положительными и отрицательными. Тогда их центр тяжести P оказывается однозначно определен-

[1] Der baryzentrischer Calkul, Leipzig 1827, Gesammelte Werke I (Leipzig 1885), 633 стр.

ным и при варьировании масс m_1, m_2, m_3 может „описать" всю плоскость (т. е. занять любое положение на ней). Поэтому эти три массы m_1, m_2, m_3 можно рассматривать как координаты точки P, причем ясно, что положение P зависит только от отношений этих трех величин. Этим впервые было введено в геометрию то, что мы теперь называем треугольными координатами. Сказанного достаточно для объяснения названия книги Мёбиуса; из ее прочего очень интересного содержания наибольшую связь с нашими исследованиями имеют § 17—20. В них Мёбиус применяет принцип знаков $\pm$ при нахождении площадей треугольников и объемов тетраэдров, причем его определения в точности совпадают с теми, которые я вам изложил.

Следует еще упомянуть, что Мёбиус, будучи уже стариком (в 1858 г.), дополнил эти результаты одним плодотворным открытием, которое было впервые опубликовано лишь в 1865 г. в его работе „Об определении объема многогранника"[1]).

А именно, в этой работе он показал, что существуют такие многогранники, которым никак не удается приписать определенный объем. А между тем, как мы уже видели, всякому, как угодно сложно перекрученному многоугольнику на плоскости можно приписать вполне определенную площадь. На этом удивительном явлении нам следует остановиться подробнее.

Будем исходить из вышеустановленной формулы для объема тетраэдра:

$$(1,\ 2,\ 3,\ 4) = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix}.$$

Разложение этого определителя по минорам последней колонны сводится, совершенно аналогично тому, что мы имели в случае треугольника (стр. 23), к тому, что

[1]) Über die Bestimmung des Inhalts eines Polyeders в „Berichte über die Verhandlungen der Königlich Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften" (mathematisch-physikalische Klasse), Bd. 17 (1865), S. 31; Gesammelte Werke II (Leipzig 1886), S. 473.

мы разлагаем наш тетраэдр на четыре других тетраэдра, основаниями которых служат его четыре грани, а общею вершиною — начало координат O. В результате, обращая внимание на циклическую последовательность $1, 2, 3, 4$ и применяя правило знаков теории определителей, получаем такую формулу:

$$(1, 2, 3, 4) = (0, 2, 3, 4) - (0, 3, 4, 1) + (0, 4, 1, 2) - (0, 1, 2, 3).$$

В эту формулу, в отличие от соответствующей формулы для треугольника, в которую входили только знаки плюс, входят также и знаки минус, что объясняется тем, что при циклическом перемещении определители четного порядка меняют знак, а определители нечетного порядка знака не меняют. Конечно, переставляя подходящим образом строки, можно избавиться от знаков минус, но при этом приходится отказаться от циклического порядка.

Например, можно написать:

$$(1, 2, 3, 4) = (0, 2, 3, 4) + (0, 4, 3, 1) + (0, 4, 1, 2) + (0, 2, 1, 3).$$

Чтобы вскрыть содержащуюся здесь закономерность, представим себе, что поверхность тетраэдра вырезана хотя бы из бумаги и развернута на плоскость грани $2, 3, 4$ так, что вершина 1 принимает три различных положения (рис. 25). Тогда вершины каждого бокового треугольника, в порядке их записи в последней формуле, следуют одна за другой на рис. 25 против часовой стрелки, следовательно, в одинаковом направлении обхода во всех треугольниках.

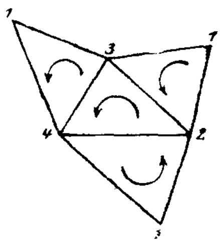

Рис. 25.

Конечно, эту закономерность можно высказать и не разворачивая пространственной фигуры на плоскость. А именно, каждое из шести ребер принадлежит двум граням, и мы замечаем, что при обходе всех треугольников в установленном выше направлении **каждое ребро** приходится проходить **один раз** в одном, **другой раз** в противоположном направлении. Этим правилом, которое Мёбиус назвал **законом ребер**, очевидно, определяется направление обхода для всех граней, если таковое произвольно задано для какой-нибудь одной грани. Тогда наша формула гласит: тетраэдр (*1, 2, 3, 4*) можно рассматривать как сумму четырех тетраэдров — частей — с одною и тою же первою вершиною *O* и с тремя другими вершинами в каждом, расположенными вслед за *O* в том порядке, какой получается по закону ребер Мёбиуса, как продолжение направления обхода (*2, 3, 4*).

Выше (стр. 24), обобщая формулу разложения треугольника, мы пришли к определению площади любых многоугольников. Совершенно так же попробуем теперь, исходя из последнего результата, дать определение объема любых многогранников. При этом нам придется допустить возможность взаимного пересечения, во-первых, сторон отдельного многоугольника, служащего гранью многогранника, а во-вторых, плоскостей этих граней. Затем нам нужно будет фиксировать какую-нибудь вспомогательную точку *O* и определить прежде всего объем отдельной пирамиды, которой проектируем из *O* отдельную грань многогранника.

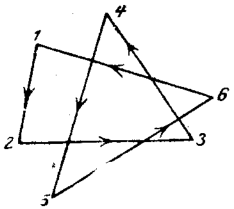

Рис. 26.

Для этого мы должны сперва фиксировать на основании этой пирамиды (пусть это, например, будет грань (*1, 2, 3, 4, 5, 6*) многогранника на рис. 26) определенное направление обхода. Тогда этот многоугольник получает определенную площадь, согласно упомянутой формуле. Как и в элементарной геометрии, положим объем пирамиды (*0, 1, 2, 3, 4, 5, 6*) равным одной трети произведения площади основания на высоту, но только присоединим к нему знак плюс или минус в зависимости от того, представится ли обход (*1, 2, 3, 4, 5, 6*), рассматриваемый из *O*, идущим против или по часовой стрелке. Непосредственно видно, что это определение содержит в себе предыдущее определение, относящееся к тетраэдру, как частный случай; впрочем, первое определение естественным образом можно получить из второго, заменяя многоугольник, как это делается при определении его площади, суммой треугольников с надлежащим направлением обхода, и определяя пирамиду как сумму тетраэдров, проектирующих эти треугольники.

Желая теперь и в общем случае представить многогранник в виде суммы таких составляющих его пирамид, мы должны для каждой грани установить определенное направление обхода. Согласно предыдущему, при этом мы можем руководствоваться только правилом ребер, а именно: для какого-нибудь одного многоугольника фиксируем направление обхода произвольным образом, а остальные многоугольники обходим так, чтобы пройти по каждому ребру, общему двум соседним граням, в двух противоположных направлениях.

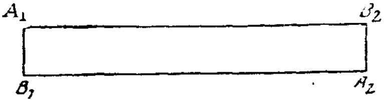

Рис. 27.

Если удается применить это правило ко всем граням поверхности, не наталкиваясь на противоречия, то получаем объем многогранника в виде суммы объемов отдельных пирамид, имеющих общей вершиной O, а основаниями грани многоугольника, с установленным таким образом направлением обхода; нетрудно видеть, что получаемый результат однозначен и не зависит от положения точки O. Однако имеет место тот крайне удивительный факт, что правило ребер не для всякой замкнутой многогранной поверхности удается провести без противоречий.

Другими словами, существуют многогранники, к которым оказывается неприложимым никакое определенное правило знаков и которым поэтому никоим образом нельзя приписать определенного объема. В этом и состоит великое открытие, опубликованное Мёбиусом в 1865 г.

В упомянутой работе Мёбиус рассматривает, между прочим, поверхность, названную позже **листом Мёбиуса**, получаемую следующим образом.

Вырезанный из бумаги длинный узкий прямоугольник $A_1B_1A_2B_2$ (рис. 27) перекручивают один раз и скрепляют (сшивают) узкие его стороны A_1B_1, A_2B_2, так чтобы A_1 совпало с A_2, а B_1 с B_2 (а не наоборот); при этом передняя сторона листа переходит, очевидно, в заднюю, так что получается **поверхность с одной только стороной**. Отсюда такой немного вульгарный вывод: маляр, покрывая весь этот лист краской, должен был бы затратить этой краски вдвое больше, чем он мог бы предположить, исходя из длины первоначального листа: выкрасив лист один раз по всей его длине, маляр подойдет к первоначальному месту, но с противо-

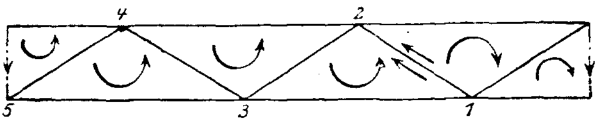

Рис. 28.

положной стороны, и должен будет еще раз пройти кистью по всему листу прежде, чем вернется к действительному исходному пункту.

Вместо этого изогнутого листа можно также получить многогранную (незамкнутую) поверхность с исключительно плоскими частями, имеющую такое же свойство, если разбить прямоугольник хотя бы на треугольники и перегнуть его по линиям деления; для **полученного пояса из треугольников уже нельзя будет воспользоваться правилом ребер**. Для этого нужно иметь, по меньшей мере, пять треугольников, которые следует расположить так, как указано на рис. 28. При этом крайние полутреугольники при свертывании поверхности дают один треугольник (*4*, *5*, *1*). Исходя из положительного направления обхода (*1*, *2*, *3*) и продолжая его влево по правилу ребер, получим последовательно обходы (*3*, *2*, *4*), (*3*, *4*, *5*), (*5*, *4*, *1*), (*5*, *1*, *2*). В последнем из них ребро *1*, *2* проходится **в том же** направлении, что и в исходном треугольнике (*1*, *2*, *3*), а это противоречит правилу ребер. Будучи перегнут вдоль ребер и сложен, лист, рассматриваемый сверху, имеет вид пятиугольной фигуры, диагона-

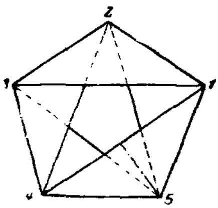

Рис. 29.

лями которой служат его же пять сторон *1 3*, *3 5*, *5 2*, *2 4*, *4 1*, как здесь скицировано (рис. 29). Соединяя свободные ребра этого пояса, т. е. упомянутые пять диагоналей, треугольниками с какой-либо точкой пространства *O* (лучше всего расположенной симметрично над средней линией пятиугольника), Мёбиус получает замкнутый многогранник, а именно перекрученную пятигранную пирамиду. Конечно, к этому замкнутому многограннику, образованному 10 треугольниками, правило ребер тоже неприменимо, а потому не приходится говорить о его объеме[1]).

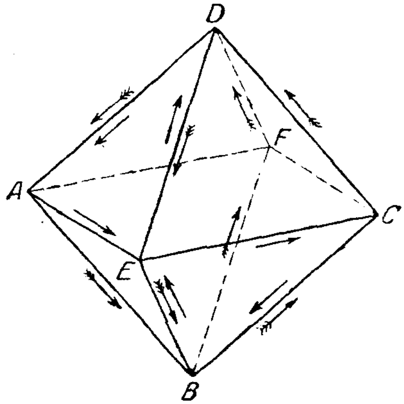

Рис. 30.

Еще один замкнутый односторонний многогранник очень простого построения мы можем легко получить из октаэдра (рис. 30) следующим образом. Из числа граней октаэдра выбирают какие-либо четыре грани, которые, не будучи соседними, т. е. не имея общих ребер, имеют попарно по общей вершине (например, *AED*, *EBC*, *CFD*, *ABF*) и присоединяют к ним три диагональные плоскости *ABCD*, *EBFD*, *AECF*.

Получаемый таким образом „гептаэдр“ (семигранник)[2]) имеет те же ребра, что и наш октаэдр, ибо в каждом ребре последнего, как непосредственно видно, встречаются по две соседних грани гептаэдра (а именно, каждый раз боковая грань с диагональной плоскостью октаэдра).

---

[1]) О применении этого одностороннего многогранника в графической статике см. в моей работе „О собственных напряжениях в плоских диаграммах“ („Über Selbstspannungen ebener Diagramme“), Mathematische Annalen, Bd. 67, S. 438; Klein F., Gesammelte Mathematische Abhandlungen, Bd. 11, S. 692, Berlin 1922.

[2]) В литературе впервые упоминается у C. Reinhardt, Zu Möbius Polyedertheorie, Verhandlungen der Königlich Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften (mathematisch-physikalische Klasse), Bd. 37, 1885.

Но диагонали октаэдра нельзя рассматривать как ребра гептаэдра, ибо для последнего диагональные плоскости октаэдра не являются соседними гранями; напротив того, вдоль этих диагоналей AC, BD, EF наша многогранная поверхность пересекает самое себя. Доказательство односторонности этого гептаэдра тоже легко получается при помощи правила ребер. А именно, если в последовательности граней AED, $EDFB$, ECB, $ABCD$ задать как-либо для первой из них направление обхода и определить направление обхода для следующих граней соответственно правилу ребер, то окажется, что ребро AD будет пройдено дважды в одном и том же направлении.

На этом я заканчиваю изучение длин, площадей и объемов и перехожу к рассмотрению дальнейших элементарных геометрических величин.

Если до сих пор нами руководило имя Мёбиуса, то теперь мы примкнем к идеям великого геометра Германа Грассмана в Штетине, которые были им впервые изложены в 1844 г. в его „Учении о линейном протяжении" („Die lineale Ausdehnungslehre")[1]. Эта книга, как и книга Мёбиуса, чрезвычайно богата идеями, но в противоположность последней написана так неясно, таким необыкновенно темным языком, что в продолжение десятилетий оставалась без внимания и непонятой; только тогда, когда пришли другим путем к подобным же идеям, обратили внимание на их наличие в книге Грассмана. Чтобы получить представление об его абстрактном языке, достаточно рассмотреть заголовки введения к этой книге. Вот они: „Вывод понятия чистой математики", „Вывод понятия учения о протяжении", „Изложение понятия учения о протяжении", далее следует еще „Обзор общего учения о формах". Лишь после того как читатель осилил все эти общие „изложения", он подходит ко все еще очень трудно понимаемому, чисто отвлеченному изложению основного содержания книги. Лишь позже, в 1862 г., в новой обработке своего „Учения о протяжении"[2])

---

[1]) Leipzig 1884. Cp. Gesammelte mathematische und physikalische Werke I (Leipzig 1894); 2 Aufl., Leipzig 1898.

[2]) Berlin 1862. Cp. Werke I_2. Leipzig 1896.

Грассман пользуется немного более легким для понимания аналитическим изложением с помощью координат.

Самое название „Учение о протяжении" придумано было Грассманом для того, чтобы отметить, что его исследования относятся к любому числу измерений. „Геометрия" же для него является лишь применением этой новой совершенно абстрактной дисциплины к обыкновенному пространству трех измерений. Однако это новое название не привилось, — в настоящее время говорят просто об *n*-мерной геометрии (или геометрии *n* измерений).

Мы познакомимся с идеями Грассмана, пользуясь привычной для нас аналитической формой изложения в координатах. Ограничиваясь на первое время геометрией на плоскости, ближайшую главу назовем так:

II. ГРАССМАНОВ ПРИНЦИП ОПРЕДЕЛИТЕЛЕЙ ДЛЯ ПЛОСКОСТИ

Будем исходить снова из идей, изложенных нами в начале первой главы: там мы из координат трех точек составили определитель:

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

и толковали его как удвоенную площадь треугольника, т. е. как площадь параллелограма.

Рассмотрим теперь еще схемы

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix}, \text{ соответственно } \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \end{vmatrix},$$

образованные из координат двух или соответственно одной точки. Эти схемы будем называть матрицами. На каждую такую матрицу условимся смотреть как на представительницу совокупности всех определителей, которые получаются из нее вычеркиванием одной или соответственно двух колонн.

Таким образом из первой матрицы, опуская первую или соответственно вторую колонну, получаем определители второго порядка:

$$Y = y_1 - y_2; \quad X = x_1 - x_2,$$

а опуская третью, — определитель:

$$N = x_1 y_2 - x_2 y_1;$$

принятый здесь выбор обозначений окажется целесообразным для геометрии в пространстве.

Мы должны исследовать, какой геометрический образ фиксируется этими тремя определителями X, Y, N; этот образ мы сможем тогда считать с таким же правом новой элементарной геометрической величиной, с каким до сих пор считали таковой площадь треугольника. Из второй однострочной матрицы возникают, в качестве однострочных определителей (первого порядка), наряду с числом единица еще и сами координаты x_1, y_1; последние определяют точку с этими координатами как простейшую элементарную величину, и следовательно, не требуют дальнейших исследований.

Теперь не представит затруднения для понимания, если я сразу же выскажу принцип Грассмана в общем виде: пусть для плоскости и для пространства рассматриваются все матрицы (имеющие меньше строк, чем колонн), у которых каждая строка составлена из координат одной какой-либо точки и из единицы: требуется исследовать, какие геометрические образы фиксируются теми определителями, которые получаются из этих матриц вычеркиванием достаточного числа колонн. Этот принцип установлен здесь до известной степени произвольно и лишь постепенно оказывается целесообразным путеводителем среди множества основных геометрических образов; зато позже мы в нем узнаем естественный источник большого круга идей, который охватывает всю геометрическую систематику.

Вернемся теперь опять к конкретной проблеме на плоскости: что является данным в фигуре (рис. 31) из двух точек *1*, *2*, если известны определители X, Y, N? Очевидно, в положении обеих точек остается еще одна степень свободы, ибо оно вполне определяется лишь четырьмя величинами. Я утверждаю: для X, Y, N получается одна и та же тройка значений тогда и и только тогда, когда точка *1* является концом, а точка *2* началом отрезка с определенной длиной и направлением, но могущего как угодно передвигаться вдоль определенной прямой: направление отрезка мы будем здесь, как и в дальнейшем, отмечать стрелкой, направленной от начальной точки *2* к конечной точке *1*.

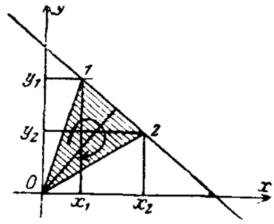

Рис. 31.

Что величины X, Y, N прежде всего определяют собой прямую, соединяющую точки *1*, *2*, непосредственно видно из того, что ее уравнение

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

можно записать также в виде:

$$Y \cdot x - X \cdot y + N = 0;$$

но отсюда же видно, что эта прямая вполне определяется также уже одними отношениями $X:Y:N$.

Но на основании наших прежних исследований о длинах отрезков и площадях треугольников заключаем, что X и Y представляют проекции на оси x-ов и y-ов отрезка (*1*, *2*) с направлением от *2* к *1*, а N — удвоенную площадь треугольника (*0*, *1*, *2*) с направлением обхода *0*, *1*, *2*. Очевидно, единственными переменами в положении точек *1*, *2*, при которых все эти три величины остаются без изменения, являются передвижения отрезка (*1*, *2*) вдоль его прямой при сохранении его длины и направления.

Этим наше утверждение доказано. Такой отрезок определенных длины и направления, лежащий на определенной прямой, Грассман назвал „линейной частью“ (Linienteil). [Мы будем в дальнейшем говорить „линейный элемент“.]

Теперь в немецкой литературе более употребительно название „вектор“, точнее—„скользящий вектор“, в отличие от обыкновенного или „свободного“ вектора, для которого допускается всякий, хотя бы и выводящий его из прямой, параллельный сдвиг, при сохранении его длины и направления. Этот скользящий вектор, определяемый матрицей

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix}$$

или соответственно определителями X, Y, N, является, следовательно, первым элементарным геометрическим образом, который мы рассматриваем, следуя принципу Грассмана.

Тут же замечу, что величины X, Y сами по себе определяют свободный вектор, ибо они не изменяются и при параллельном сдвиге отрезка в сторону от его прямой,— аналогично тому, как отношения $X:Y:N$, эквивалентные двум величинам, определяют только неограниченную прямую, но не длину отрезка на ней. Свободный вектор и неограниченная прямая являются, таким образом, двумя побочными образами, с которыми мы здесь встречаемся.

Принцип, который является руководящим при введении таких побочных образов, будет установлен лишь впоследствии.

Эти понятия играют в механике, а именно в элементах статики, крайне важную роль; там они уже с давних пор возникли сами собой совершенно естественным путем. Сюда относится прежде всего, пока мы оперируем на плоскости, статика плоских твердых систем. А именно, здесь при геометрическом трактовании „линейный элемент“ можно рассматривать как полный эквивалент, приложенный к системе силы, точку приложения которой, ввиду твердости тела, можно произвольно передвигать вдоль нее самой.

Представьте себе силу вполне в духе старой механики. В точке *2* укреплена веревка, на которую действует тяга, изображаемая по величине отрезком *1 2* (рис. 32). В качестве примера живого характера мышления старых механиков, противоположного современному абстрактному изложению, охотно укажу, что раньше обыкновенно силу изображали рукой, которая тянет веревку [1]).

Координаты вектора X, Y называют **компонентами силы**, а координату N — моментом вращения вокруг начала O; ибо из уравнения прямой для ее расстояния от O находим величину:

$$p = \frac{N}{\sqrt{X^2+Y^2}},$$

а потому N действительно равно произведению p на длину отрезка $\sqrt{X^2+Y^2}$, т. е. на величину силы. Эти три величины, вместе взятые, можно назвать координатами силы; аналитическое определение дает для них,—и это особенно важно,— в каждом случае вполне определенные знаки, которым, разумеется, можно, как и раньше, дать геометрическое истолкование. При этом, конечно, следует заметить, что ради симметрии формул мы отклонились от наиболее принятого в механике определения знака момента вращения.

Рис. 32.

А именно, обычно в качестве момента вращения употребляют определитель:

$$\begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ X & Y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_1 - x_2 & y_1 - y_2 \end{vmatrix},$$

составленный из координат начала *2* и из обеих координат X, Y свободного вектора. Этот определитель, очевидно, прямо противоположен нашему N. Впрочем, это небольшое расхождение, будучи однажды отмечено, вряд ли может дать повод к недоразумениям.

Первой задачей механики твердого тела является сведение произвольной системы таких сил X_i, Y_i, N_i

---

[1]) Ср., например, чертежи в книге Вариньона „Nouvelle mécanique ou statique" („Новая механика или статика"), Париж 1775.

($i=1, 2, \ldots, n$) к одной результирующей; аналитически это сводится к образованию скользящего вектора с координатами

$$\sum_{i=1}^{n} X_i, \quad \sum_{i=1}^{n} Y_i, \quad \sum_{i=1}^{n} N_i.$$

Для геометрического решения этой задачи графостатика развивает свои очень элегантные методы. А именно, в случае двух сил пользуются просто известным правилом параллелограма, а во всех прочих случаях прибегают к „многоугольнику сил“ и к „веревочному многоугольнику“. Таким образом, вообще говоря, для каждой системы сил находят в качестве ее результирующей однозначно определяемый скользящий вектор. Однако все же встречаются исключения, хотя бы в том случае, когда система состоит из двух равных, параллельных и противоположно направленных сил X, Y, N_1 и $-X$, $-Y$, N_2 ($N_1 - N_2$), действующих вдоль различных прямых; результирующая имеет компоненты 0, 0, $N_1 + N_2$, а такие числа, очевидно, никогда не могут быть координатами вектора. Элементарное изложение с этим явлением не может справиться, как следует, потому оно должно всегда считаться с возможностью появления таких, несводимых далее, так называемых „пар сил“, которые нарушают простоту и всеобщую приложимость теорем. Однако нетрудно и эти кажущиеся исключения тоже охватить нашей системой, если чисто формально применить наши предыдущие формулы к компонентам 0, 0, $N_1 + N_2$. Тогда для интенсивности результирующей получится значение $\sqrt{0^2 + 0^2} = 0$, а для ее расстояния от начала — выражение $p = \frac{N_1 + N_2}{0} = \infty$.

Следовательно, если увеличивать бесконечно расстояние p обыкновенной силы от начала O и приближать к нулю ее интенсивность $\sqrt{X^2 + Y^2}$ так, чтобы произведение $p \cdot \sqrt{X^2 + Y^2}$, представляющее собой момент вращения, оставалось конечным, то компоненты этой силы перейдут как раз в упомянутые исключительные значения. Потому результирующую 0, 0, $N_1 + N_2$ пары сил можно назвать бесконечно малой силой, действующей на бесконечно далеком расстоянии от начала, с конечным моментом вращения. Эта фикция крайне удобна и полезна для прогресса науки; она вполне соответствует обычному вообще введению в геометрию бесконечно удаленных элементов. Пользуясь этим расширением понятия силы, можно прежде всего высказать такое предложение, не допускающее никаких исключений:

Любое число сил, действующих в одной плоскости, всегда имеет своей результирующей некоторую силу. А элементарное изложение должно всегда в этом случае волочить за собой еще и альтернативу пары сил.

Теперь я дополню эти рассуждения исследованием поведения наших элементарных величин при преобразованиях прямоугольной системы координат; это приведет нас к одному очень ценному принципу классификации, благодаря которому грассманова систематика впервые получает свое более тонкое осуществление.

Формулы преобразования координат, т. е. выражения координат x', y' точки по отношению к новому положению осей через ее первоначальные координаты x, y, для четырех основных преобразований прямоугольной системы координат имеют, как известно, такой вид:

1) для параллельного сдвига:

$$\left.\begin{aligned} x' &= x + a, \\ y' &= y + b; \end{aligned}\right\} \qquad (A_1)$$

2) для поворота на угол φ:

$$\left.\begin{aligned} x' &= x\cos\varphi + y\sin\varphi, \\ y' &= -x\sin\varphi + y\cos\varphi; \end{aligned}\right\} \qquad (A_2)$$

3) для зеркального отображения около x-оси:

$$\left.\begin{aligned} x' &= x, \\ y' &= -y; \end{aligned}\right\} \qquad (A_3)$$

4) для изменения масштаба:

$$\left.\begin{aligned} x' &= \lambda x, \\ y' &= \lambda y. \end{aligned}\right\} \qquad (A_4)$$

Сочетая преобразования этих четырех видов при всевозможных значениях параметров a, b, φ, λ, получаем уравнения для наиболее общего возможного перехода от одной прямоугольной системы координат к другой, при одновременном изменении масштаба.

Сочетания всевозможных сдвигов и вращений соответствуют совокупности всех „собственных" (т. е. понимаемых в буквальном или собственном смысле слова) движений системы координат в пределах плоскости.

Совокупность всех этих преобразований образует „группу". Это означает, что сочетание каждых двух из них дает снова преобразование, принадлежащее к той же совокупности, и что для каждого из этих преобразований имеется в группе ему обратное преобразование. Специальные преобразования (А), различным сочетанием которых можно получить все остальные, называют образующими группы.

Прежде чем обратиться к рассмотрению того, как при этих отдельных преобразованиях изменяются наши определители X, Y, N, я выскажу два общих принципа, которые я уже давно выдвинул на первое место с особым ударением при этих основных геометрических исследованиях; если они сперва в таком общем виде и будут звучать немного неясно, то на конкретном материале их суть сразу же вполне уяснится. Один из них гласит, что геометрические свойства каких-либо фигур должны всегда выражаться такими формулами, которые не изменяются при перемене системы координат, т. е. при одновременном выполнении над координатами всех точек фигуры одного из наших преобразований, и что, наоборот, каждая формула, инвариантная в этом смысле по отношению к группе этих преобразований координат, должна выражать некоторое геометрическое свойство. Простейшими, известными всем примерами может служить выражение для расстояния в фигуре, состоящей из двух точек, или для угла в фигуре, образованной двумя прямыми; с этими и многими другими подобными формулами нам в дальнейшем постоянно придется иметь дело. А здесь для пояснения укажу еще совершенно тривиальный пример не-инвариантных формул: уравнение $y=0$ для фигуры, состоящей из одной точки x, y плоскости, выражает, что эта точка лежит на x-оси; ось x-ов является, собственно, совершенно произвольным дополнением, чуждым существу нашей фигуры, и служит только для удобного ее описания.

Подобно этому, всякое не-инвариантное уравнение выражает то или иное отношение фигуры к произвольно присоединенным внешним вещам, в частности к системе координат, но не соответствует никаким геометрическим свойствам самой фигуры.

Второй принцип относится к системам аналитических величин, образованных из координат нескольких точек *1*, *2*,..., например к системе из наших трех величин X, Y, N. О такой системе говорят, что она определяет собой новый геометрический, т. е. не зависящий от системы координат, образ, если при всех наших преобразованиях координат она определенным образом преобразовывается в самое себя, т. е. если система величин, аналогично образованная из новых координат точек *1*, *2*,..., выражается исключительно (т. е. не вводя значений самих координат) через величины, образованные из старых координат. Более того, все аналитические выражения мы будем классифицировать соответственно тому, как они ведут себя при преобразованиях координат, и два ряда выражений, которые преобразовываются одинаковым образом, будем считать равноценными, т. е. определяющими геометрические образы одного и того же типа.

Все это мы сейчас разъясним на том материале, который дают грассмановы элементарные величины. Для этого подвергнем обе наши точки x_1, y_1; x_2, y_2 одному и тому же преобразованию координат; начиная с параллельного сдвига (A_1), полагаем:

$$x_1' = x_1 + a, \quad x_2' = x_2 + a,$$
$$y_1' = y_1 + b, \quad y_2' = y_2 + b.$$

Сравнивая координаты линейного элемента

$$X = x_1 - x_2, \quad Y = y_1 - y_2, \quad N = x_1 y_2 - x_2 y_1;$$
$$X' = x_1' - x_2', \quad Y' = y_1' - y_2', \quad N' = x_1' y_2' - x_2' y_1',$$

до и после преобразования, мы получаем:

$$1)\qquad \left.\begin{aligned} X' &= X,\\ Y' &= Y,\\ N' &= N + bX - aY; \end{aligned}\right\} \qquad (\mathrm{B}_1)$$

Точно таким же образом получают следующие формулы преобразования:

2) при вращении (A_2):

$$\left.\begin{aligned} X' &= X\cos\varphi + Y\sin\varphi,\\ Y' &= -X\sin\varphi + Y\cos\varphi,\\ N' &= N; \end{aligned}\right\} \qquad (\mathrm{B}_2)$$

3) при зеркальном отображении (A_3):

$$\left.\begin{aligned} X' &= X,\\ Y' &= -Y,\\ N' &= -N; \end{aligned}\right\} \qquad (\mathrm{B}_3)$$

4) при изменении масштаба (A_4):

$$\left.\begin{aligned} X' &= \lambda X,\\ Y' &= \lambda Y,\\ N' &= \lambda^2 N. \end{aligned}\right\} \qquad (\mathrm{B}_4)$$

В последних формулах (B_4) выступает различие в поведении отдельных величин, а именно, показатель той степени λ, на которую умножаются эти величины, неодинаков. В физике это различие учитывают тем, что вводят понятие о размерности: говорят, что X, Y имеют размерность 1-линии, а N — размерность 2-площади.

Рассматривая эти четыре группы формул, мы прежде всего замечаем, что линейный элемент, определяемый тремя детерминантами X, Y, N, действительно удовлетворяет нашему общему определению геометрической величины: его новые координаты X', Y', N' всегда выражаются через одни только старые X, Y, N.

Мы придем к дальнейшим результатам, рассматривая только первые два уравнения каждой группы. В них совсем не входит N, следовательно, первые две координаты X', Y' линейного элемента в новой системе координат зависят только от первоначальных значений X, Y тех же координат. При этом при параллельном сдвиге X, Y совсем не изменяются, а при всех прочих преобразованиях они связаны такими же соотношениями с X', Y', какими старые координаты x, y любой точки связаны с ее же новыми координатами x', y'. Поэтому, согласно только что высказанному второму принципу, можно утверждать, что уже две первые координаты X, Y определяют некоторый геометрический образ независимо от системы координат, и этим образом является, как мы знаем уже, свободный вектор. Здесь мы встречаемся с намеченным выше принципом систематики, который побуждает ввести этот образ (свободный вектор) наряду с линейным элементом.

К той же области принадлежит также следующее соображение: поскольку X', Y', N' входят во все четыре группы формул в виде линейных *однородных* функций от X, Y, N, то посредством деления каждых двух уравнений находим, что отношения $X':Y':N'$ зависят тоже только от отношений $X:Y:N$. Поэтому *эти отношения* сами по себе (безотносительно к действительным значениям самих величин X, Y, N) тоже должны определять собой, независимо от системы координат, некоторый *геометрический образ*; и в самом деле, мы уже раньше установили, что этим образом является *неограниченная прямая*.

Применяя наши формулы (B) к частному случаю „пары сил“, т. е. полагая $X = Y = 0$, находим, что во всех четырех случаях $X' = Y' = 0$, а для N' получаем соответственно:

$$N' = N; \tag{C_1}$$

$$N' = N; \tag{C_2}$$

$$N' = -N; \tag{C_3}$$

$$N' = \lambda^2 N. \tag{C_4}$$

Пользуясь обычным термином „инвариант“ для обозначения величины, которая при всех операциях некоторой группы преобразований либо совсем не изменяется, либо самое большее умножается на некоторого множителя, и называя этот инвариант абсолютным или относительным в зависимости от того, будет ли упомянутый множитель равен единице или нет, можно выразить формулы (C) такими словами: момент вращения пары сил является относительным инвариантом при всех ортогональных преобразованиях координат на плоскости.

Сравним теперь с этим результатом поведение при преобразованиях координат элементарной геометрической величины, которую мы изучали в самом начале, а именно площади треугольника

$$\Delta = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}.$$

Параллельный сдвиг (A_1) не изменяет величины этого определителя, ибо при нем только прибавляется к элементам первой колонны число a, а к элементам второй — число b, т. е. прибавляются a-кратные и соответственно b-кратные элементов последней колонны:

$$\Delta' = \Delta. \qquad (D_1)$$

Столь же просто находим в случае трех прочих видов преобразований, что

$$\Delta' = \Delta, \qquad (D_2)$$

$$\Delta' = -\Delta, \qquad (D_3)$$

$$\Delta' = \lambda^2\Delta, \qquad (D_4)$$

о чем, конечно, можно было бы и непосредственно заключить, исходя из геометрического значения площади треугольника. Но эти формулы вполне совпадают с формулами (C); следовательно, площадь треугольника, а потому и площадь всякой плоской фигуры (которую ведь можно представить как сумму треугольников), ведет себя при произвольном преобразовании координат точно таким же образом, как момент вращения пары сил. Поэтому, следуя нашему второму общему принципу, мы должны обе эти вещи рассматривать как геометрически эквивалентные, понимая это в таком смысле: имея на плоскости какую-либо пару сил с моментом N и взяв любой треугольник с площадью $\Delta = N$, найдем, что это последнее равенство сохраняется при всех преобразованиях координат, т. е. мы можем **момент вращения пары сил представить наглядно, независимо от преобразования координат, в виде площади треугольника или параллелограма или еще какой-нибудь иной фигуры.** Каким именно образом это сопряжение должно происходить геометрически, будет видно позже при изучении совершенно аналогичных, но немного более сложных, а потому и более поучительных, соотношений в пространстве.

На этом я покину геометрию на плоскости, в которой эти понятия имеют почти тривиальную простоту. Для всех аналитических формул удается непосредственно подыскать их хорошее геометрическое толкование, причем и на геометрию распространяется сама собой полная аналитическая общность. При этом всегда является существенным то предположение, — пусть это будет еще раз подчеркнуто, — что раз навсегда установлены надлежащие соглашения относительно знаков $\pm$ в геометрических образах.

III. ГРАССМАНОВ ПРИНЦИП ДЛЯ ПРОСТРАНСТВА

Соответствующие исследования, относящиеся к пространству, мы проведем вполне аналогично предыдущим рассуждениям. Таким образом исходным пунктом будут служить матрицы, составленные из координат одной, двух, трех или четырех точек:

$$|x_1,\ y_1,\ z_1,\ 1|, \quad \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix}, \quad \begin{matrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{matrix}.$$

Определителями первой матрицы являются сами координаты точки и не требуют дальнейших исследований. Четвертая матрица уже сама является определителем четвертого порядка и дает, как известно, ушестеренный объем тетраэдра (*1*, *2*, *3*, *4*), который можно, в соответствии с вводимыми в дальнейшем терминами, назвать **пространственным элементом** (Raumteil, буквально: „пространственная часть"). Впрочем, этот определитель можно также рассматривать просто как объем параллелепипеда с ребрами $4\ 1$, $4\ 2$, $4\ 3$ (рис. 33), для которого Грассман ввел название „шпат“ (термин, заимствованный из минералогии).

Новые образы получаются из второй и третьей матриц. Вторая (двустрочная) матрица представляет собой совокупность следующих шести определителей второго порядка, которые получим, вычеркивая каждый раз по две колонны:

$$\left.\begin{array}{lll} X = x_1 - x_2, & Y = y_1 - y_2, & Z = z_1 - z_2, \\ L = y_1 z_2 - y_2 z_1, & M = z_1 x_2 - z_2 x_1, & N = x_1 y_2 - x_2 y_1; \end{array}\right\} \qquad (1)$$

точно так же третья (трехстрочная) матрица доставляет

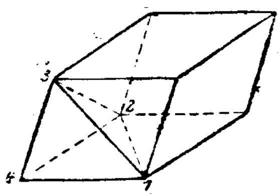

Рис. 33.

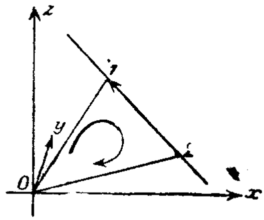

Рис. 34.

нам следующие четыре определителя третьего порядка:

$$\left.\begin{array}{l} \mathfrak{L} = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 & 1 \\ y_2 & z_2 & 1 \\ y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix}, \quad \mathfrak{M} = \begin{vmatrix} z_1 & x_1 & 1 \\ z_2 & x_2 & 1 \\ z_3 & x_3 & 1 \end{vmatrix}, \quad \mathfrak{N} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}, \\ \mathfrak{P} = -\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}. \end{array}\right\} \qquad (2)$$

Что касается, прежде всего, шести определителей (1), то из соответствующих разъяснений, относящихся к плоскости, можно легко заключить, что X, Y, Z являются проекциями на координатные оси отрезка, идущего от 2 к 1, а L, M, N — удвоенными площадями проекций на координатные плоскости треугольника $(0, 1, 2)$ с направлением обхода $0, 1, 2$ (рис. 34). Все эти величины остаются, очевидно, неизменными, если отрезок $(1, 2)$ передвигать вдоль его прямой, сохраняя его длину и направление;

следовательно, они представляют собой то, что мы будем называть линейным элементом (Linienteil), или скользящим вектором в пространстве. Первые три величины, X, Y, Z, остаются неизменными также и при параллельном сдвиге этого вектора в сторону от его прямой; следовательно, взятые сами по себе они определяют свободный вектор. Подобно этому пять отношений $X:Y:\ldots:N$ остаются неизменными как при произвольном изменении длины, так и при перемене на обратное направления этого линейного элемента на фиксированной прямой; следовательно, они определяют неограниченную прямую.

Четыре определителя (2) определяют прежде всего плоскость, проходящую через три точки: *1*, *2*, *3*, ибо ее уравнение

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

можно, очевидно, записать так:

$$\mathfrak{L}x + \mathfrak{M}y + \mathfrak{N}z + \mathfrak{P} = 0,$$

так что уже одни только отношения $\mathfrak{L}:\mathfrak{M}:\mathfrak{N}:\mathfrak{P}$ фиксируют некоторую неограниченную плоскость. Далее мы сразу же замечаем, что $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ равны удвоенным площадям проекций на координатные плоскости треугольника (*1*, *2*, *3*), если брать его каждый раз с направлением обхода *1*, *2*, *3*, а $\mathfrak{P}$ равно шестикратному объему тетраэдра (*0*, *1*, *2*, *3*), тоже взятому со знаком, соответствующим этой последовательности вершин. Эти четыре величины остаются, очевидно, неизменными в том и только в том случае, если треугольник (*1*, *2*, *3*) передвигать по его плоскости и так его при этом деформировать, чтобы его площадь и направление обхода оставались неизменными. Следовательно, они определяют собою треугольник или вообще часть плоскости, имеющую такую именно подвижность, — то, что Грассман называет „плоскостной частью“ [1]) (Ebenenteil) или „плоскостной величи-

[1]) [В дальнейшем будем переводить словами „плоскостный элемент“.]

ной“ (Plangrösse). Первые три координаты, $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$, плоскостного элемента остаются без изменения также и при сдвиге плоскости треугольника параллельно ей самой; следовательно, они определяют собой площадь и направление обхода треугольника, который может свободно перемещаться в пространстве параллельно самому себе, — так называемую „свободную плоскостную величину“ (freie Plangrösse).

Желая заняться линейным элементом ближе, мы должны прежде всего обратить внимание на то, что в пространстве он определяется пятью свободно изменяемыми параметрами, ибо хотя оба его конца имеют вместе взятые шесть координат, но один конец может произвольно передвигаться вдоль некоторой прямой. Следовательно, определенные нами выше шесть координат X, Y, Z, L, M, N линейного элемента не могут быть не зависящими друг от друга величинами, а должны удовлетворять некоторому условию. Это последнее можно проще всего вывести из учения об определителях, которое вообще служит всегда ключом к нашим теориям. Рассматриваем определитель:

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

который, конечно, тождественно равен нулю, ибо элементы двух его строк попарно совпадают. Разложим его сумму произведений из соответственных миноров первой и последней пары строк: первое слагаемое содержит оба минора, обведенные пунктиром, следовательно, оно сводится к $N \cdot Z$; по аналогии с этим, для всего определителя получаем значение $2\,(N \cdot Z + M \cdot Y + L \cdot X)$. Поэтому имеет место тождество:

$$X \cdot L + Y \cdot M + Z \cdot N = 0 \qquad (3)$$

в качестве необходимого условия для шести координат всякого линейного элемента; нетрудно убедиться в том, что наличие соотношения (3) между какими-нибудь шестью величинами является также и *достаточным условием* для того, чтобы их можно было представить посредством формул (1), в качестве координат некоторого линейного элемента. Конечно, я не стану здесь останавливаться на этом совершенно элементарном доказательстве.

Теперь я снова перейду к *применению этих понятий в механике*. Как и на плоскости (стр. 48), представителем *силы, приложенной к пространственному твердому телу*, является линейный элемент, изображающий линию приложения, величину и направление этой силы. При этом первые три координаты X, Y, Z линейного элемента называются компонентами силы, параллельными координатным осям, а его вторые три координаты L, M, N — ее *моментами вращения вокруг этих осей*[1]). Три компоненты X, Y, Z определяют собой кроме величины еще и направление силы, или соответственно линейный элемент с направляющими косинусами, относящимися между собой, как $X:Y:Z$; это направление изображается диагональю параллелепипеда, ребрами второго являются отрезки X, Y, Z на координатных осях. Таким же самым построением можно посредством трех величин L, M, N тоже получить определенное направление, которое называют *направлением оси результирующего момента вращения*. Соотношение (3) означает, согласно известной формуле геометрии в пространстве, что *направление силы и направление оси результирующего момента вращения взаимно перпендикулярны*. Точно так же, как и на плоскости, мы включаем в понятие линейного элемента в качестве „*пары сил*" тот предельный случай, при котором $X = Y = Z = 0$, тогда как L, M, N не исчезают все три одновременно, и простой предельный переход показывает, что под парой сил следует понимать *бесконечно удаленную, бесконечно малую силу, моменты вращения которой остаются конечными*. Элементарная теория и в этом случае относится пугливо к таким выражениям, — для нее парой сил является совместное действие двух параллель-

[1]) Здесь снова наши обозначения отличаются знаком от принятых в механике (ср. стр. 50).

ных, равных по величине, но противоположно направленных сил, действующих вдоль различных прямых:

$$X,\ Y,\ Z,\ L_1,\ M_1,\ N_1 \text{ и } -X, -Y, -Z,\ L_2,\ M_2,\ N_2.$$

Действительно, для суммы этих сил получаются как раз такие координаты:

$$0,\ 0,\ 0,\ L_1 + L_2,\ M_1 + M_2,\ N_1 + N_2,$$

какие мы только что имели в виду.

Наша очередная задача — сложение системы произвольно заданных сил

$$X_i,\ Y_i,\ Z_i,\ L_i,\ M_i,\ N_i\ (i = 1, 2, \ldots, n),$$

приложенных к твердому телу. Обыкновенно, в элементарных книгах и на лекциях на эту задачу затрачивают много времени, тогда как мы здесь сможем решить ее очень быстро благодаря тому, что наши аналитические формулы делают излишним различение разных случаев, неизбежное при тяжеловесном элементарном изложении, не употребляющем правила знаков. Основной принцип сложения (сил) заключается в том, что составляют суммы

$$\Xi = \sum_{i=1}^{n} X_i, \quad \mathrm{H} = \sum_{i=1}^{n} Y_i, \quad \mathrm{Z} = \sum_{i=1}^{n} Z_i,$$

$$\Lambda = \sum_{i=1}^{n} L_i, \quad \mathrm{M} = \sum_{i=1}^{n} M_i, \quad \mathrm{N} = \sum_{i=1}^{n} N_i$$

и рассматривают их как координаты системы сил или как координаты „динамы“, пользуясь целесообразным выражением, введенным Плюккером (Plücker); при этом мы снова различаем три компоненты вдоль осей и три момента вращения около этих осей. Но, вообще говоря, эта динама не представляет собой отдельной силы, ибо шесть сумм не всегда удовлетворяют условию:

$$\Xi \cdot \Lambda + \mathrm{H} \cdot \mathrm{M} + \mathrm{Z} \cdot \mathrm{N} = 0,$$

имеющему место для координат отдельного линейного элемента. Тут мы имеем по сравнению с плоскостью то новое, что системы сил, приложенных к твердому телу, не всегда можно свести к одной силе.

Чтобы получить конкретное представление о сущности динамы, попробуем представить ее по возможности ясным способом в виде результирующей как можно меньшего числа сил. В самом деле оказывается, что каждую динаму можно рассматривать как результирующую отдельной силы и пары сил, ось которой параллельна линии, вдоль которой действует первая сила,—так называемой центральной оси динамы,—причем это сведение (к силе и паре) может быть произведено одним только способом. Классическое изложение этой теории сложения сил, приложенных к твердому телу, имеется в „Элементах статики“ („Eléments de statique“) Пуансо (Poinsot), которые появились впервые в 1804 г. и после того были много раз переизданы [1]; поэтому говорят также о центральной оси Пуансо. Впрочем, Пуансо излагает эту теорию очень растянуто, пользуясь методами элементарной геометрии, в том виде, как еще и до сих пор поступают в начальном преподавании.

Для доказательства высказанной теоремы заметим, что всякий раз, когда по выделении какой-либо пары сил получается одна сила, последняя должна иметь на осях компоненты, равные Ξ, H, Z; следовательно, чтобы ось пары была параллельна центральной оси, ее моменты вращения должны относиться, как $\Xi : \mathrm{H} : \mathrm{Z}$. Поэтому ее шестью координатами должны быть числа

$$0,\ 0,\ 0,\ k\Xi,\ k\mathrm{H},\ k\mathrm{Z},$$

где k—параметр, который еще подлежит определению. Присоединяя к этой паре сил динаму

$$\Xi,\ \mathrm{H},\ \mathrm{Z},\ \Lambda-k\Xi,\ \mathrm{M}-k\mathrm{H},\ \mathrm{N}-k\mathrm{Z}, \tag{A}$$

получим исходную динаму Ξ, H, Z, Λ, M, N, и предложение было бы доказано, если бы удалось так подобрать k, чтобы система величин (А) представляла собой одну

[1]) 12 édition par J. Bertrand, Paris 1877.

силу. Для этого необходимо и достаточно, чтобы эти координаты (А) удовлетворяли условию (3), т. е. чтобы:

$$\Xi(\Lambda - k\Xi) + \mathrm{H}(\mathrm{M} - k\mathrm{H}) + \mathrm{Z}(\mathrm{N} - k\mathrm{Z}) = 0;$$

отсюда однозначно следует, что

$$K = \frac{\Xi\Lambda + \mathrm{HM} + \mathrm{ZN}}{\Xi^2 + \mathrm{H}^2 + \mathrm{Z}^2}.$$

В самом деле, можно считать, что знаменатель отличен от нуля, ибо в противном случае мы с самого начала имели бы дело не с собственной динамой, а только с парой сил. Таким образом, приписывая параметру k это значение, — Плюккер называет его „параметром“ динамы, — действительно получаем искомое разложение динамы на пару сил и одну силу, причем из хода доказательства видно, что это разложение однозначно.

Теперь возникает вопрос о том, с какими геометрическими представлениями можно связать это разложение. Эти исследования также восходят к Мёбиусу, а именно, к его „Курсу статики“[1] („Lehrbuch der Statik“), 1837 г. В этом последнем он на первое место ставит вопрос об осях, по отношению к которым динама имеет момент вращения, равный нулю, — о так называемых нулевых осях; систему всех таких нулевых осей он называет нулевой системой. Отсюда и ведет свое происхождение этот, конечно, известный вам, термин.

Теперь мы должны дать общее определение понятия „момент вращения“ или просто „момент“, которое будет применяться, начиная с этого места. Пусть сперва заданы в пространстве два линейных элемента (*1*, *2*) и (*1'*, *2'*) (рис. 35). Рассматриваем концы их как вершины тетраэдра (*1*, *2*, *1'*, *2'*), объем которого равен:

$$\frac{1}{6}\cdot\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2, & y_2, & z_2, \\ x_1' & y_1' & z_1' \\ x_2' & y_2' & z_2' \end{vmatrix}.$$

Вычисляя этот определитель как сумму произведений из миноров первой и последней пары строк [как мы это

[1]) Leipzig 1837, ср. Werke III, Leipzig 1886.

делали выше (стр. 60) с определителем, тождественно равным нулю], получаем:

$$\frac{1}{6}(XL' + YM' + ZN' + LX' + MY' + NZ'),$$

где $X', \ldots, N'$ — координаты линейного элемента $(1', 2')$. Входящую сюда билинейную комбинацию координат обоих линейных элементов:

$$XL' + YM' + ZN' + LX' + MY' + NZ'$$

будем называть **моментом одного линейного элемента по отношению к другому**; он равен шестикратному объему тетраэдра, образованного концами обоих линейных элементов, и поэтому является геометрической величиной, не зависящей от системы координат. Если r и r' — длины линейных элементов, φ — угол между ними и p — кратчайшее расстояние (общий перпендикуляр) между их прямыми, то путем элементарных геометрических соображений легко найти, что этот момент равен произведению $rr' \cdot p \cdot \sin\varphi$, если только надлежащим образом определять знак φ.

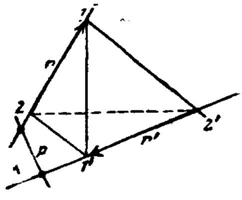

Рис. 35.

Если же вместо линейного элемента $(1, 2)$ задана **неограниченная прямая**, то под моментом линейного элемента $(1', 2')$ по отношению к ней будем понимать его момент в прежнем смысле, взятый по отношению к линейному элементу длины $r = 1$, лежащему на этой прямой, т. е. выражение $r' \cdot p \cdot \sin\varphi$. Оно получается из предыдущего выражения делением его на $r = |\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}|$, так что окончательно находим: **момент линейного элемента** X', Y', Z', L', M', N' **по отношению к неограниченной прямой, содержащей линейный элемент** X, Y, Z, L, M, N, равен:

$$\frac{XL' + YM' + ZN' + LX' + MY' + NZ'}{|\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}|};$$

фактически это выражение изменяется только при изменении отношений шести величин $X, Y, \ldots, N$, а также при перемене на противоположные всех их знаков, так что его значение вполне определено, если только задана упомянутая неограниченная прямая с определенным направлением на ней. Этот момент линейного элемента является как раз тем, что в статике называют **моментом вращения силы, изображаемой этим линейным элементом**, вокруг нашей прямой, как вокруг оси; причем опять-таки в статике часто употребляют противоположный знак (ср. стр. 61).

Перейдем теперь к **моменту** или **моменту вращения** (относительно той же направленной прямой) системы сил, т. е. динамы

$$\Xi = \sum_{i=1}^{n} X_i', \ldots, \quad \mathrm{N} = \sum_{i=1}^{n} N_i'.$$

Представляется естественным понимать под ним сумму моментов отдельных сил, т. е. выражение:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{XL_i' + YM_i' + ZN_i' + LX_i' + MY_i' + NZ_i'}{|\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}|} =$$
$$= \frac{X\Lambda + Y\mathrm{M} + Z\mathrm{N} + L\Xi + M\mathrm{H} + N\mathrm{Z}}{|\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}|}.$$

При последовательном отождествлении неограниченной прямой $X, \ldots, N$ с тремя положительными осями это выражение принимает значения Λ, M, N, чем и оправдываются введенные раньше (стр. 62) названия для этих величин.

Теперь мы можем заняться тем вопросом, какой ставит перед собой Мёбиус. Заданная динама $\Xi, \mathrm{H}, \ldots, \mathrm{N}$ имеет по отношению к прямой $X:Y:\ldots:N$ момент 0 (так что последняя является **нулевой осью**) в том случае, если числитель последнего выражения

$$\Lambda X + \mathrm{M}Y + \mathrm{N}Z + \Xi L + \mathrm{H}M + \mathrm{Z}N = 0.$$

Следовательно, **нулевая система динамы представляет собой совокупность всех прямых $X:Y:\ldots:N$, удовлетворяющих этому уравнению.** Но это последнее является наиболее общим линейным однородным уравнением относительно шести величин $X, \dots, N$, ибо коэфициенты $\Xi, \dots, \mathrm{Z}$, как координаты динамы, могут иметь произвольные значения. Точно такие же совокупности прямых, определяемых произвольным линейным однородным уравнением, исследовал Плюккер, — такой же, как *Мёбиус*, передовой пионер в аналитической геометрии XIX столетия, — под названием *линейных комплексов*, в связи с вопросами, на которых нам еще придется останавливаться подробнее впоследствии. *Таким образом мёбиусова нулевая система — то же самое, что и плюккеров линейный комплекс.*

Постараемся теперь дать *как можно более ясную картину* этой нулевой системы, причем, конечно, не может быть и речи о геометрической „фигуре" в буквальном смысле этого слова, ибо нулевые прямые бесконечно часто перекрывают все пространство. Тем не менее можно очень хорошо представить себе их группировки. При этом, следуя избранному в этом курсе методу, мы постараемся привести систему координат в как можно более удобное положение; это будет достигнуто, если выберем за *ось z центральную ось динамы*. Поскольку динаму можно, как мы знаем, представить в виде результирующей для системы, состоящей из одной силы, действующей вдоль центральной оси, и одной пары сил с параллельной к ней осью, то при этом выборе z-оси должны обратиться в нуль четыре координаты Ξ, H, Λ, M динамы, тогда как Z изобразит величину названной отдельной силы, а N — момент вращения упомянутой пары сил относительно ее оси. Поэтому параметр динамы оказывается равным

$$k = \frac{\Xi\Lambda + \mathrm{HM} + \mathrm{ZN}}{\Xi^2 + \mathrm{H}^2 + \mathrm{Z}^2} = \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{Z}}.$$

Уравнение линейного комплекса в этой новой системе координат получает такой простой вид:

$$\mathrm{N}Z + \mathrm{Z}N = 0$$

или, после деления на Z:

$$kZ + N = 0. \qquad (1)$$

Этот вид уравнения мы кладем в основу наших дальнейших исследований. Если P_1 (x_1, y_1, z_1) и P_2 (x_2, y_2, z_2) — две точки на одной из прямых $X:Y:Z:L:M:N$ нулевой системы, то $Z = z_1 - z_2$ и $N = x_1 y_2 - x_2 y_1$, а потому для каждых двух точек одной нулевой прямой из (1) получается условие:

$$k(z_1 - z_2) + (x_1 y_2 - x_2 y_1) = 0. \tag{2}$$

Если фиксировать P_2, то (2) представит уравнение, связывающее координаты $x_1 y_1 z_1$, всех точек P_1, которые лежат вместе с P_2 на одной какой-нибудь прямой нулевой системы; заменяя для ясности x_1, y_1, z_1 текущими координатами x, y, z, найдем, что все такие точки P_1 заполняют плоскость, определяемую уравнением:

$$y_2 x - x_2 y + k \cdot z = k z_2. \tag{2'}$$

Эта плоскость проходит через самую точку P_2, ибо ее уравнение удовлетворяется при $x = x_2$, $y = y_2$, $z = z_2$. Этим мы доказали, что через каждую точку P_2 пространства проходит бесчисленное множество нулевых прямых, которые образуют плоский пучок лучей, заполняющий плоскость (2'). Наша задача будет решена, если мы составим себе ясное представление о положении этой плоскости („нулевой плоскости"), принадлежащей каждой точке P_2. Оба выражения $N = x_1 y_2 - y_1 x_2$, $Z = z_1 - z_2$, входящие в (2), имеют свойство оставаться неизменными при параллельных сдвигах пространства вдоль z-оси, а также при поворотах вокруг этой оси; такие сдвиги оставляют неизменными x и y, а следовательно, и N, а также разность $z_1 - z_2$; а вращения не оказывают на z-координаты, следовательно, и на Z никакого влияния и оставляют также неизменной N как величину площади в плоскости x, y.

Поэтому при винтовых движениях пространства вокруг центральной оси, — ибо таково значение z-оси, — и при его сдвигах вдоль нее уравнение (2) и вместе с ним и определяемая им нулевая система переходят сами в себя.

Эта теорема облегчает нашу задачу необычайно: если только нам известна для каждой точки положительной

x-оси соответствующая ей нулевая плоскость, то тем самым мы знаем также нулевую плоскость, принадлежащую любой точке пространства. Ибо, сдвигая эту положительную полуось x вдоль z-оси и вращая ее вокруг последней, можно с любой точкой пространства совместить некоторую точку этой полуоси x; при этом, согласно нашей теореме, принадлежащие этим точкам нулевые плоскости должны совпасть. Другими словами: нулевые плоскости точек всякой полупрямой,

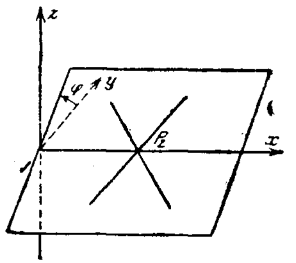

Рис. 36.

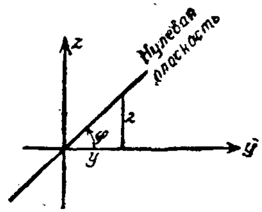

Рис. 37.

перпендикулярной к центральной оси, имеют относительно этой последней и полупрямой положение, не зависящее от выбора этой прямой.

Поэтому, ограничиваясь x-осью, полагаем $y_2 = z_2 = 0$ и получаем из (2′) уравнение нулевой плоскости, принадлежащей точке P_2 с абсциссой x_2:

$$kz - x_2 y = 0.$$

Эта плоскость проходит через самую x-ось, ибо ее уравнение удовлетворяется тождественно при $y = z = 0$ (рис. 36). Переписав это уравнение в виде $\frac{z}{y} = \frac{x_2}{k}$, заключаем, что угол φ наклона этой плоскости к горизонтальной ($x\,y$-плоскости) имеет такой тангенс:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{x_2}{k};$$

поэтому теперь положение нашей плоскости является вполне определенным; на рис. 37 изображен ее след на вертикальной yz-плоскости.

В связи со сказанным раньше, мы можем этот результат сформулировать, совершенно независимо от того или другого выбора системы координат, в таком виде: каждой точке, находящейся на расстоянии r от центральной оси (которую будем считать вертикальной), принадлежит в нулевой системе плоскость, которая проходит через перпендикуляр, опущенный из этой точки на центральную ось, и наклонена к горизонтальной плоскости под углом, тангенс которого равен $\frac{r}{k}$. Следовательно, при передвижении этой точки вдоль какой-либо полупрямой, перпендикулярной к центральной оси, принадлежащая этой точке плоскость нулевой системы при $r=0$ горизонтальна, а при возрастании r поворачивается в ту или другую сторону (в зависимости от того, будет ли $k \gtrless 0$), асимптотически приближаясь, при неограниченном возрастании r, к вертикальному положению.

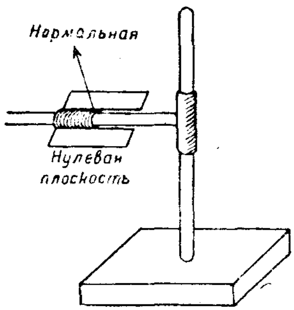

Рис. 38.

Я могу вам наглядно представить эти отношения на модели Шиллинга (Schilling) (рис. 38). Здесь на подвижном стержне, который может вращаться вокруг центральной оси и передвигаться вдоль нее, помещен плоский лист, который надлежащим образом поворачивается при передвижении вдоль стержня.

Обратим теперь особое внимание на направление нормали к нулевой плоскости, принадлежащей точке P_2; ее направляющие косинусы относятся, как известно, так, как коэфициенты уравнения (2′) этой плоскости, т. е. как

$$y_2 : (-x_2) : k. \qquad (3)$$

Но это самое направление можно также рассматривать как связанное с точкой P_2 направление некоторого бесконечно малого винтового движения пространства. А именно, если все пространство повернуть как твердое тело вокруг z-оси на конечный угол ω и передвинуть его одновременно параллельно z-оси на отрезок c, то каждая точка x, y, z перейдет в новое положение x', y', z', определяемое уравнениями:

$$x' = x\cos\omega - y\sin\omega,$$
$$y' = x\sin\omega + y\cos\omega,$$
$$z' = z + c.$$

От этого конечного винтового движения переходим к бесконечно малому, заменяя ω бесконечно малой величиной $-d\omega$ и принимая одновременно $c = kd\omega$.

Знак минус означает, что при $k > 0$ вращение в xy-плоскости отрицательно, если сдвиг произведен в положительном z-направлении, т. е. что направление винтового движения отрицательно (левое или левовращающее винтовое движение). Пренебрегая величинами второго и высшего порядка по отношению к $d\omega$, следовательно, полагая $\cos d\omega = 1$, $\sin d\omega = d\omega$, получаем:

$$x' = x + y\,d\omega,$$
$$y' = -x\,d\omega + y,$$
$$z' = z + k\,d\omega.$$

Следовательно, приращениями координат определенной точки C_2 при этом бесконечно малом винтовом движении являются:

$$dx_2 = y_2\,d\omega,\quad dy_2 = -x_2\,d\omega,\quad dz_2 = k\,d\omega,$$

т. е. P_2 передвигается в направлении

$$dx_2 : dy_2 : dz_2 = y_2 : (-x_2) : k.$$

А это действительно в точности совпадает с направлением нормали (3). Следовательно, если произвести такое бесконечно малое винтовое движение пространства вокруг центральной оси, при котором сдвиг является k-кратным угла вращения (взятого отрицательным), то в каждой точке пространства принадлежащая ей плоскость нулевой системы с периметром k нормальна к отрезку дуги, пробегаемому этой точкой.

Поскольку представление о винтовом движении является очень наглядным, можно, пользуясь вышесказанным, составить себе живую картину расположения плоскостей нулевой системы. Чем больше, например, расстояние r точки от центральной оси, тем длиннее горизонтальная проекция $rd\omega$ элемента дуги, описываемой этой точкой при винтовом движении, тем более отлого расположен этот элемент, ибо его высота $kd\omega$ постоянна, тем круче подымается нормальная к этому элементу дуги кривой плоскость нулевой системы. Если соединить бесчисленное множество таких бесконечно малых винтовых движений в одно непрерывное винтовое движение пространства, то каждая точка, лежащая на расстоянии r от центральной оси, описывает **винтовую линию**. Угол наклона этой линии к горизонту имеет тангенс, равный — $\frac{k}{r}$, а поэтому ход имеет всегда одно и то же не зависящее от r значение $2\pi k$; плоскости, **нормальные к этим винтовым линиям, и являются скоростями нулевой системы**.

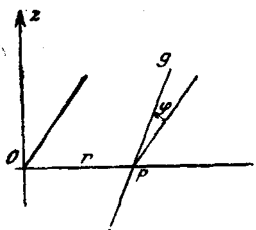

Рис. 39.

До сих пор мы говорили только о плоскостях нулевой системы; теперь, в заключение, постараемся составить непосредственно наглядную картину самих нулевых осей. Возьмем какую-либо нулевую ось g (рис. 39) и построим ее кратчайшее расстояние от центральной оси, как общий перпендикуляр этих двух прямых. Пусть он пересекает центральную ось в точке Q, а g — в точке P. Тогда PQ как полупрямая, идущая из P перпендикулярно к центральной оси, принадлежит нулевой системе, а поэтому плоскость QPg должна быть плоскостью нулевой системы, принадлежащей точке P. Но так как g перпендикулярна к PQ, то она образует с горизонтальной плоскостью такой же угол φ, как и нулевая плоскость в точке P, т. е. $\operatorname{tg}\varphi = \frac{r}{k}$, где $r = QP$.

Следовательно, мы получим все нулевые оси, проводя в каждой точке P каждой полупрямой, перпендикулярной к центральной оси, такой перпендикуляр к этой полупрямой, чтобы угол ее наклона к горизонту имел тангенс, равный $\operatorname{tg}\varphi = \frac{r}{k}$, где r есть расстояние точки P от центральной оси [1]).

Это построение можно сделать еще немного более наглядным, поступая следующим образом: строим вокруг центральной оси, как вокруг оси, круговой цилиндр радиуса r и чертим на нем все винтовые линии (рис. 40) с наклоном φ к горизонту, определяемым из равенства $\operatorname{tg}\varphi = \frac{r}{k}$; тогда совокупность всех касательных к этим винтовым линиям тождественна, очевидно, с совокупностью всех нулевых осей на расстоянии r от центральной оси. Варьируя r, получаем все нулевые оси. Эти винтовые линии при удалении от центральной оси становятся, очевидно, все круче; в каждой точке такой линии нулевая плоскость, принадлежащая этой точке, служит также соприкасающейся плоскостью для линий. Поэтому эти линии проходят перпендикулярно к ранее упомянутым винтовым линиям, которые в каждой своей точке нормальны к соответствующей нулевой плоскости.

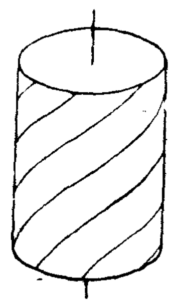

Рис. 40.

После этих рассуждений, вскрывших двойную связь нулевой системы с винтами, становится понятным, почему всю эту теорию называют также коротко теорией винтов (или „винтовым исчислением"); в частности, это название употребил Болл (Sir Robert Ball), написавший „Теорию винтов" [„Theory of screws"[2])], где он, действительно, изучает все геометрические соотношения,

[1]) [На первый взгляд этот вывод может показаться парадоксальным, так как согласно ему для получения всех нулевых осей достаточно построить в каждой точке пространства по одной прямой, а между тем через каждую точку должно проходить бесконечно много нулевых осей. Но при указанном построении действительно через данную точку P пройдет бесконечно много прямых, но только построенных (кроме одной) не в P, а в других точках пространства, а именно в тех, где каждую из них пересекает общий перпендикуляр с центральной осью.]

[2]) Dublin 1876.

находящиеся в связи с заданной динамой, приложенной к твердому телу[1]. — Вернемся теперь к нашему систематическому развитию идей.

Следуя грассманову принципу, мы получили в качестве четырех элементарных геометрических пространственных образов точку, линейный элемент, плоскостный элемент и пространственный элемент. Точно так же, как и на плоскости, нашей ближайшей задачей будет исследовать поведение этих образов при преобразованиях прямоугольной системы координат и затем дать их классификацию, руководясь ранее высказанным общим принципом.

IV. КЛАССИФИКАЦИЯ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ОБРАЗОВ ПО ИХ ПОВЕДЕНИЮ ПРИ ОРТОГОНАЛЬНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЯХ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ КООРДИНАТ

Прежде всего мы, конечно, должны заняться обзором всех возможных преобразований пространственной ортогональной системы координат; они вообще играют фундаментальную роль для всей геометрии пространства, так что уже поэтому нельзя было бы в этом курсе пройти мимо них.

Самое общее относящееся сюда изменение системы координат слагается, как и на плоскости, из 1) параллельного сдвига (переноса); 2) вращения вокруг начала; 3) зеркального отображения; 4) изменения масштаба. Уравнениями параллельного сдвига, конечно, будут:

$$x' = x + a,\quad y' = y + b,\quad z' = z + c. \tag{A$_1$}$$

Уравнения вращения во всяком случае имеют форму

$$\left.\begin{aligned} x' &= a_1x + b_1y + c_1z,\\ y' &= a_2x + b_2y + c_2z,\\ z' &= a_3x + b_3y + c_3z; \end{aligned}\right\} \tag{A$_2$}$$

определением их коэфициентов, которое здесь существенно сложнее, чем на плоскости, мы сейчас же займемся.

---

[1] [С этими идеями читатель может подробнее ознакомиться по „Винтовому исчислению“ проф. Котельникова.]

Посредством сочетаний всех возможных преобразований этих двух видов получаются все „собственные" (т. е. понимаемые в собственном или буквальном смысле слова) движения пространственной системы координат.

Зеркальное отображение можно производить здесь относительно одной какой-нибудь из координатных плоскостей (как на плоскости относительно одной из осей), например около xy-плоскости, что дает:

$$x' = x, \; y' = y, \; z' = -z.$$

Впрочем, этим формулам можно придать более симметричный вид, употребляя три отрицательных знака:

$$x' = -x, \; y' = -y, \; z' = -z; \tag{A_3}$$

это — зеркальное отображение относительно самого начала координат Q, которое называют также „инверсией" [1]).

На плоскости уравнения $x' = -x$, $y' = -y$ соответствуют не зеркальному отображению, а повороту на 180°; вообще инверсия относительно начала координат является зеркальным отображением только в пространствах нечетного числа измерений, при четном же числе измерений представляет собой обыкновенный поворот.

Наконец, изменение масштаба просто изображается уравнениями:

$$\left.\begin{aligned} x' &= \lambda x, \\ y' &= \lambda y, \\ z' &= \lambda z, \end{aligned}\right| \tag{A_4}$$

где $\lambda > 0$; при $\lambda < 0$ это преобразование, кроме изменения масштаба, содержит еще зеркальное отображение.

Займемся теперь ближе формулами вращения. Вообще, вращение около начала Q зависит, как известно, от трех параметров, так как, во-первых, три направляющие косинуса оси вращения соответствуют двум независимым величинам и, во-вторых, угол вращения может быть совершенно произвольным. Симметричное изображение всех

[1]) Иногда термин „инверсия" употребляют также для обозначения преобразования посредством обратных радиусов, совершенно отличного от предыдущего зеркального отображения (см. ниже на 166 стр.).

вращений посредством трех параметров дает, как я это показал в моем зимнем курсе[1]), теория кватернионов.

Впрочем, уже Эйлер вывел относящиеся сюда формулы. Я приведу их в том виде, в каком обыкновенно их дают в учебниках механики, а именно, пользуясь девятью направляющими косинусами новых осей по отношению к старым. Исходим из вышеприведенного вида (A_2) уравнений преобразования:

$$\left.\begin{aligned} x' &= a_1x + b_1y + c_1z, \\ y' &= a_2x + b_2y + c_2z, \\ z' &= a_3x + b_3y + c_3z. \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Если x, $y=0$, $z=0$ — какая-либо точка на старой x-оси, то в новой системе координат она имеет координаты $x'=a_1 \cdot x$, $y'=a_2 \cdot x$, $z'=a_3 \cdot x$, т. е. a_1, a_2, a_3 являются косинусами углов между старой x-осью и тремя новыми осями; точно так же b_1, b_2, b_3 и c_1, c_2, c_3 являются направляющими косинусами y- и z-осей (в новой системе).

Эти девять коэфициентов уравнений преобразования отнюдь не являются взаимно независимыми. Связывающие их уравнения можно получить либо из только что указанного значения этих величин, либо из известного соотношения, которое имеет место при всякой „ортогональной подстановке“, т. е. при всяком вращении или зеркальном отображении с сохранением начала координат:

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = x^2 + y^2 + z^2. \qquad (2)$$

Оно выражает инвариантность расстояния от начала Q.

Мы избираем здесь второй путь:

α) Подставляя (1) в (2) и сравнивая коэфициенты, получаем следующие 6 соотношений между 9 величинами $a_1, \ldots, c_3$:

$$\left.\begin{aligned} a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 &= 1, & c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 &= 1, \\ b_1c_1 + b_2c_2 + b_3 + c_3 &= 0, & c_1a_1 + c_2a_2 + c_3a_3 &= 1, \\ b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 &= 1, & & \\ a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 &= 0. & & \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

---

[1]) См. т. I, стр. 89 (111) и след.

β) Умножая три уравнения (1) соответственно на три величины a, или соответственно b, или соответственно c и складывая, получим, на основании (3), их решения в таком виде:

$$\left.\begin{aligned} x &= a_1x' + a_2y' + a_3z', \\ y &= b_1x' + b_2y' + b_3z', \\ z &= c_1x' + c_2y' + c_3z'; \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

это, — как видим, так называемая **транспонированная относительно (1) линейная подстановка**, которая получается при обмене местами строк и столбцов в таблице коэфициентов.

γ) С другой стороны, по правилам теории определителей получаем такое решение уравнений (1):

$$x = \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} x' & b_1 & c_1 \\ y' & b_2 & c_2 \\ z' & b_3 & c_3 \end{vmatrix}, \ldots, \text{ где } \Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

есть определитель этой системы уравнений. Здесь коэфициент при x' должен быть одинаков с таковым же в первом уравнении (4), т. е.

$$\frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1; \qquad (5)$$

вообще **каждый коэфициент ортогональной подстановки должен быть равен соответствующему ему минору таблицы из коэфициентов, деленному на определитель Δ.**

δ) Вычислим теперь этот самый определитель Δ системы коэфициентов; для этого, пользуясь теоремой об умножении определителей, составляем его квадрат:

$$\begin{vmatrix} a_1 b_1 c_1 \\ a_2 b_2 c_2 \\ a_3 b_3 c_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_1 b_1 c_1 \\ a_2 b_2 c_2 \\ a_3 b_3 c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 & b_1a_1 + b_2a_2 + b_3a_3 & c_1a_1 + c_2a_2 + c_3a_3 \\ a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 & b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 & c_1b_1 + c_2b_2 + c_3b_3 \\ a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3 & b_1c_1 + b_2c_2 + b_3c_3 & c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 \end{vmatrix},$$

причем колонны первого определителя умножаем на колонны второго. По формулам (3) для этого квадрата мы получаем просто:

$$\Delta^2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1,$$

так что окончательно мы находим:

$$\Delta = \pm 1.$$

Чтобы остановить наш выбор на одной из этих возможностей, вспомним, что до сих пор мы пользовались только соотношением (2), которое имеет место как при вращении, так и при зеркальном отображении. Но среди всех этих ортогональных преобразований вращения характеризуются тем, что они *получаются из „тождественного преобразования“* $x' = x, y' = y, z' = z$ *путем непрерывного изменения* коэфициентов соответственно непрерывному передвижению системы координат из первоначального положения в новое; в противоположность этому подстановка, которую мы вообще называем зеркальным отображением, получается непрерывным изменением из инверсии $x' = -x$, $y' = -y$, $z' = -z$; сама же инверсия не может быть получена из тождественного преобразования путем непрерывного изменения. С другой стороны, определитель преобразования является непрерывной функцией коэфициентов и потому должен во время непрерывного перехода от тождественного преобразования к какому-нибудь вращению изменяться непрерывно.

Но при этом исходном преобразовании этот определитель имеет значение:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = +1,$$

а поскольку он, как мы видели, вообще может быть равным только $+1$ или -1, то он обязательно должен всегда оставаться равным $+1$, так как внезапный переход от $+1$ к -1 означал бы разрыв непрерывности.

Итак, *при всяком вращении* определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = +1. \tag{6}$$

Точно так же *для всякого зеркального отображения получается* $\Delta = -1$.

Теперь формула (5) принимает такой простой вид:

$$a_1 = \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}, \tag{7}$$

и вообще всякий коэфициент в схеме подстановок вращения прямоугольной системы координат равен соответствующему ему минору.

Теперь мы обращаемся к нашей настоящей задаче: установить, как ведут себя координаты элементарных пространственных образов (линейного элемента X, Y, Z, L, M, N, плоскостного элемента $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{P}$ и, наконец, пространственного элемента T) при четырех видах изменения прямоугольной системы координат.

Выписывать все формулы преобразования было бы и длинно и скучно; поэтому отмечу только некоторые моменты, заслуживающие особого интереса. Замечу прежде всего, что во всех формулах преобразования координат линейного элемента его первые три координаты x', y', z' в новой системе выражаются, в чем вы сами легко убедитесь, исключительно, и притом линейно-однородно, через X, Y, Z, т. е. так, что L, M, N совсем не входят в их выражения.

Следовательно, согласно ранее (стр. 52 и сл.) высказанному общему принципу, совокупность трех величин X, Y, Z уже сама по себе определяет некоторый геометрический образ, не зависящий от системы координат. Это — свободный вектор, о котором мы уже упоминали (стр. 59).

Точно так же в случае плоскостного элемента (или плоскостной величины) в формулы преобразования его трех координат $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ четвертая $\mathfrak{P}$ не входит, так что и эти три координаты тоже имеют не зависящее от координат геометрическое значение; они определяют тот же упомянутый, свободный плоскостный элемент (стр. 60).

Вычислим теперь, в частности, как ведут себя три координаты свободного вектора X, Y, Z при наших преобразованиях (A_1), ..., (A_4) (стр. 74). Для этого в равенствах $X' = x_1' - x_2'$ ... подставляем вместо x_1', ... их выражения по формулам (A_2) через x, y, z. Это сразу же дает нам:

1. При параллельном сдвиге:

$$X' = X, \ Y' = Y, \ Z' = Z. \tag{B_1}$$

2. При вращении:

$$\begin{aligned} X' &= a_1X + b_1Y + c_1Z, \\ Y' &= a_2X + b_2Y + c_2Z, \\ Z' &= a_3X + b_3Y + c_3Z. \end{aligned} \tag{B_2}$$

3. При инверсии:

$$X' = -X, \ Y' = -Y, \ Z' = -Z. \tag{B_3}$$

4. При изменении масштаба:

$$X' = \lambda X, \ Y' = \lambda Y, \ Z' = \lambda Z. \tag{B_4}$$

Итак, при *сдвиге* системы координат координаты свободного вектора совсем *не изменяются*, а при *прочих преобразованиях* они ведут себя таким же образом, как *координаты точки*.

Сравним с этим результатом формулы преобразования для *пары сил*, которые мы получим из формул преобразования координат линейного элемента, полагая дополнительно $X = Y = Z = 0$, тогда, конечно, будет $X' = Y' = Z' = 0$, а для моментов вращения по отношению к новым осям получаются такие формулы:

1. При сдвиге:

$$L' = L, \ M' = M, \ N' = N. \tag{C_1}$$

2. При вращении:

$$\left.\begin{aligned} L' &= a_1L + b_1M + c_1N, \\ M' &= a_2L + b_2M + c_2N, \\ N' &= a_3L + b_3M + c_3N. \end{aligned}\right\} \tag{C_2}$$

3. При инверсии:

$$L' = L, \ M' = M, \ N' = N. \tag{C_3}$$

4. При изменении масштаба:

$$L' = \lambda^2 L, \ M' = \lambda^2 M, \ N' = \lambda^2 N. \tag{C_4}$$

Как видим, при *сдвиге* системы координат и при инверсии координаты пары сил *не изменяются* вовсе; при вращении они ведут себя, как координаты точки, а при изменении масштаба умножаются на множителя λ^2, т. е. имеют измерение 2 (измерение площади), тогда как свободный вектор имеет измерение 1 (как координаты точки).

Вывод формул (C_1), (C_3), (C_4) не представляет никаких трудностей; только для (C_2) будут, пожалуй, уместны некоторые разъяснения. А именно, при помощи вращения (A_2) получаем:

$$L' = \begin{vmatrix} y_1' & z_1' \\ y_2' & z_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_2x_1 + b_2y_1 + c_2z_1 & a_3x_1 + b_3y_1 + c_3z_1 \\ a_2x_2 + b_2y_2 + c_2z_2 & a_3x_2 + b_3y_2 + c_3z_2 \end{vmatrix}.$$

Раскрывая последний определитель, получаем $3 \cdot 3 + 3 \cdot 3 = 18$ членов, среди которых три пары (например, $a_2x_1 \cdot a_3x_2 - a_3x_1 \cdot a_2y_2, \ldots$) взаимно уничтожаются; оставшиеся 12 членов можно соединить в следующую сумму произведений определителей:

$$L' = \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} +$$

$$+ \begin{vmatrix} c_2 & a_2 \\ c_3 & a_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} z_1 & x_1 \\ z_2 & x_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}.$$

По формуле (7) для миноров системы коэфициентов вращения (стр. 79) первые множители оказываются как раз равными a_1, b_1, c_1, тогда как вторые множители равны L, M, N. Это, действительно, дает приведенную ранее формулу для L'; точно так же выводятся две другие формулы для M' и N'.

Наконец, в качестве третьего образа рассмотрим свободный плоскостный элемент; совершенно простые, подобные предыдущим, вычисления, выполнение которых я, конечно, могу предоставить вам самим, приводят к такому результату: компоненты $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ свободного плоскостного элемента во всех случаях преобразовываются совершенно таким же образом, как координаты L, M, N пары сил.

Для лучшего обозрения всех этих результатов сведем их в нижеследующую маленькую табличку.

Она дает преобразованные первые координаты, из которых остальные получаются циклическим замещением букв:

	Сдвиг	Вращение	Инверсия	Изм.масштаба
Свободный вектор.	X	$a_1X + b_1 Y + c_1Z$	$-X$	λX
Пара сил	L	$a_1L + b_1 M + c_1N$	L	$\lambda^2 L$
Свободный плоскостный элемент .	$\mathfrak{L}$	$a_1\mathfrak{L} + b_1 \mathfrak{M} + c_1\mathfrak{N}$	$\mathfrak{L}$	$\lambda^2 \mathfrak{L}$

Это дает нам точную основу для ряда геометрических предложений, которые в учебниках часто или совсем отсутствуют, или упоминаются лишь мимоходом, и притом в такой форме, что не так-то легко можно схватить их простой геометрический смысл. Между различными геометрическими образами, которые мы здесь рассматриваем, часто не проводят того четкого различения, какое мы считаем обязательным, и этим совершенно затушевывают целый ряд интересных соотношений. Так, например, уже у Пуансо понятия пары сил („couple") и свободного плоскостного элемента („aire") всегда бывают с самого начала неразрывно связаны между собой; разумеется, это неизбежно должно затруднять понимание; мы же только из сравнения последних двух строк нашей таблички впервые получаем указание на то, что, согласно высказанному ранее общему принципу, *пару сил и свободный плоскостный элемент следует рассматривать как основные геометрические понятия одного и того же рода*, ибо они при всех изменениях прямоугольной системы координат ведут себя совершенно одинаково.

Разъясним точнее смысл последнего утверждения. Если, например, к заданной паре сил L, M, N отнести некоторый плоскостный элемент при помощи равенств: $\mathfrak{L} = L$, $\mathfrak{M} = M$, $\mathfrak{N} = N$ (или если сделать это же самое в обратном порядке, исходя из $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$), то это равенство координат (пары и элемента) сохраняется при всяком преобразовании системы координат и поэтому должно допускать чисто геометрическое описание, не связанное ни с какой системой координат. Имея это в виду, будем исходить из плоскостного элемента $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$, причем ради максимального удобства фиксируем координатную систему так, чтобы было $\mathfrak{L} = \mathfrak{M} = 0$. Тогда этот свободный плоскостный элемент представит собой такой, параллельный xy-плоскости или, в частности, лежащий на ней треугольник (*1*, *2*, *3*), что $\mathfrak{N}$ будет равно удвоенной его площади, т. е. площади параллелограма (*1*, *1′*, *2*, *3*), снабженной знаком, определяемым обходом *1*, *1′*, *2* (рис. 41).

Так вот я утверждаю, что сопряженная с этим элементом пара сил с моментами $L = 0$, $M = 0$, $N = \mathfrak{N}$ может быть составлена из двух противоположных сторон (*1*, *1′*) и (*2*, *3*) этого параллелограма с остриями стрелок в точках *1* и *2*.

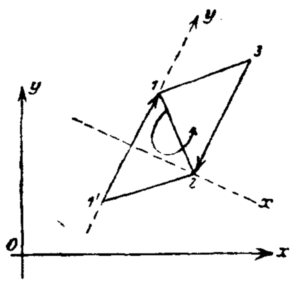

Рис. 41.

Для доказательства я выбираю систему координат на xy-плоскости еще удобнее, а именно за y-ось беру прямую *1*, *1′*, x-ось провожу через точку *2* (на рис. 41 эти оси нанесены пунктиром).

Тогда прежде всего оба линейных элемента (*1*, *1′*) и (*2*, *3*), а поэтому и сбставленная из них пара сил имеют моменты вращения $L = 0$ и $M = 0$. Далее, для линейного элемента (*1*, *1′*) третий момент также равен нулю, так что окончательно N оказывается равным моменту вращения для (*2*, *3*):

$$N = \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} = x_2 \cdot y_3,$$

ибо по условию $x_2 = x_3$ и $x_2 = 0$. С другой стороны, при таком положении координатной системы третья координата плоскостного элемента равна:

$$\mathfrak{N} = \begin{vmatrix} 0 & y_1 & 1 \\ x_2 & 0 & 1 \\ x_2 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = x_2 \cdot y_3$$

(т. е. равна произведению основания y_3 и высоты x_2 параллелограма), т. е., действительно, даже и по знаку, $N = \mathfrak{N}$, чем и доказано все наше утверждение.

Этот результат можно сразу высказать также и в общем виде, не связывая его с какой-либо специальной системой координат: *свободный плоскостный элемент, изображаемый параллелограмом с определенным направлением обхода, и пара сил, состоящая из двух противоположных сторон этого параллелограма, направленных против его обхода, являются геометрически эквивалентными образами, т. е. они имеют по отношению ко всякой прямоугольной системе координат равные компоненты.* Это предложение позволяет всегда заменять как пару сил параллелограмом, так и этот последний парой сил.

Теперь нам незачем больше заботиться о второй строке нашей таблички (стр. 82); остается еще сравнить первую и третью строки, т. е. *свободный вектор* и *свободный плоскостный элемент.* Здесь мы видим прежде всего, что при сдвигах и вращениях оба они ведут себя совершенно одинаково, но при зеркальном отображении и изменении масштаба обнаруживается различие. Чтобы проследить за этим в деталях, представим себе в привычной для нас (правой) системе координат некоторый плоскостный элемент $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ и свяжем с ним свободный вектор равенствами $X = \mathfrak{L}, Y = \mathfrak{M}, Z = \mathfrak{N}$.

Хотя эти равенства сохраняются, если ограничиваться движениями системы координат, но при зеркальных отображениях или при изменениях масштаба они тоже испытывают изменения.

Поэтому, если мы захотим выразить их геометрически, то не сможем обойтись без использования как ориентации (Sinn) системы координат (левая, правая), так и масштаба. В самом деле, фиксируя опять, как и раньше, систему координат так, чтобы $\mathfrak{L} = \mathfrak{M} = 0$, а $\mathfrak{N}$ было равно площади параллелограма (*1*, *1'*, *2*, *3*) на xy-плоскости, получаем для нашей фигуры (рис. 42), что $\mathfrak{N} > 0$, а вектор $X = 0$, $Y = 0$, $Z = \mathfrak{N}$ имеет положительное направление z-оси. Этот факт можно, очевидно, высказать в такой, независимой от специального положения системы координат, форме: для получения в правой системе координат свободного вектора, имеющего координаты, равные координатам заданного свободного плоскостного элемента, следует восставить к его плоскости перпендикуляр в ту сторону, откуда обход изображающего его параллелограма представляется направленным против часовой стрелки, и отложить на нем отрезок, равный площади этого параллелограма. Совпадение координат этого вектора и плоскостного элемента сохраняется при любых сдвигах и вращениях системы координат; однако оно нарушается, как только произведено изменение масштаба или инверсия. Если заменить измерения в сантиметрах измерениями в дециметрах, то мера площади перейдет в ее сотую часть, а мера отложенного в качестве вектора отрезка — только в его десятую часть; точно так же при инверсии будет менять свой знак вектор, но не плоскостный элемент.

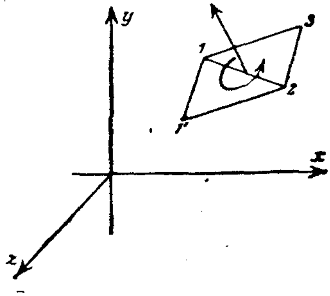

Рис. 42.

Итак, свободный плоскостный элемент и свободный вектор можно вполне отождествлять между собою только тогда, когда раз навсегда установлены определенная ориентация системы координат (правая, левая) и определенная единица длины.

Конечно, такое ограничение остается невозбранным для каждого человека в отдельности в его практике. Он должен только всегда сознавать его произвольность, чтобы по отношению к другому быть в состоянии взаимно понимать друг друга. Все эти вещи, как вы видите, оказываются чрезвычайно ясными и простыми, но все же к ним каждый раз приходится возвращаться, ибо в современной физике историческое развитие оставило во многих случаях некоторую запутанность. Поэтому я скажу еще несколько слов об истории этих вещей.

Грассманова „Теория протяжения" 1844 г. оказала очень незначительное влияние на нашу физику и механику, по причине трудно читаемого изложения. Несравненно больший успех имели в Англии идеи, которые около этого же времени стал разрабатывать Гамильтон (W. R. Hamilton) в Дублине — изобретатель кватернионов, о которых я подробно говорил в своем зимнем курсе[1]). Здесь мне остается только упомянуть, что он также создал слово „вектор“ для обозначения того, что мы назвали свободным вектором; понятием же скользящего вектора он не пользуется в явном виде. Далее, он не видит разницы между свободным плоскостным элементом и свободным вектором, так как он считает заранее установленными определенные ориентацию и масштаб для координат. Эта точка зрения привилась в физике, и там долгое время не различали собственных векторов и плоскостных элементов.

Конечно, при более тонких исследованиях постепенно все же пришли к необходимости проводить различение среди образов, одинаково называемых векторами, в зависимости от их поведения при инверсиях, и для этого стали пользоваться прилагательными „полярный“ и „аксиальный“. Полярный вектор меняет свой знак при зеркальных отображениях, следовательно, является вполне тождественным с нашим свободным вектором; аксиальный же вектор знака не меняет, следовательно, совпадает с нашим свободным плоскостным элементом (причем мы не обращаем внимания на „размерность“).

Таким образом здесь физика должна была (как это еще до сих пор делается в обычных изложениях) констатировать задним числом это неожиданное для нее различение, между тем как при нашей общей постановке вопроса оно совершенно естественным путем получается с самого начала. В заключение я приведу один пример для уточнения сказанного. Утверждение, что электрическое напряжение есть полярный вектор, означает, что оно измеряется тремя величинами X, Y, Z, которые преобразуются согласно первой строке нашей таблички (стр. 82); говоря же, что сила магнитного поля есть аксиальный вектор, мы утверждаем, что ее три компоненты преобразуются по схеме последней строки этой таблички. При этом я, оставляю открытым вопрос о том, как обстоит с размерностью этих компонент, ибо это завело бы нас слишком далеко вглубь физических подробностей.

---

[1]) См. т. I, стр. 89 (94) и сл.

Гамильтон наряду со словом „вектор" придумал еще слово „скаляр", которое тоже до сих пор играет большую роль в физике. Скаляр — это не что иное, как инвариант относительно всех наших преобразований координат, т. е. величина, которая при всех изменениях системы координат либо совсем не изменяется, либо приобретает только некоторого множителя. В соответствии с этим можно различать разные оттенки в понятии скаляра. Так, рассматривая сперва в качестве примера пространственный элемент или объем тетраэдра:

$$T = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix},$$

можно легко проверить вычислением, что оно переходит

при	сдвиге	вращении	инверсии	изм. масштаба
в	T	T	$-T$	$\lambda^3 T$

Такую величину, которая остается неизменной при сдвигах и вращениях, а при зеркальном отображении меняет знак, называют скаляром второго рода, тогда как скаляр первого рода должен оставаться неизменным и при инверсии. При этом мы снова оставляем в стороне размерность, получаемую из четвертой колонны.

Нетрудно образовать также скаляры первого рода; простейшими примерами являются $X^2 + Y^2 + Z^2$, где X, Y, Z — координаты свободного вектора, и $\mathfrak{L}^2 + \mathfrak{M}^2 + \mathfrak{N}^2$, где $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ — координаты свободного плоскостного элемента.

Что эти величины действительно остаются неизменными при всех движениях и зеркальных отображениях (но не при изменениях масштаба), это сразу же видно из таблички на стр. 82, если еще учесть равенства (3) (стр. 76) для коэфициентов вращения; поэтому эти величины должны иметь также и чисто геометричетак, как указывает последовательность направлений векторов *1* и *2*; получаем вполне определенный свободный плоскостный элемент, который как раз совпадает с элементом, определенным выше его тремя координатами.

Между прочим, абсолютная величина его площади выражается так:

$$r_1 \cdot r_2 \cdot |\sin\varphi|.$$

К 4). Если приложить все три вектора к одной точке, то они образуют три ребра некоторого параллелепипеда (рис. 46); его объем — с надлежаще определенным знаком — оказывается равным скаляру второго рода, определяемому нашим детерминантом.

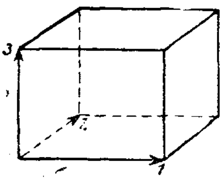

Рис. 46.

В каком же виде фигурируют эти процессы в литературе, где главным моментом не является, как это было у нас, исследование поведения известных аналитических выражений при преобразованиях координат, т. е. рациональная и простая теория инвариантов? Там, в механике и физике, выработали, следуя Грассману и Гамильтону, особую терминологию и говорят о так называемых векторной алгебре и векторном анализе, в которых образование новых векторов и скаляров из заданных векторов сравнивают с элементарными арифметическими операциями над обыкновенными числами.

Прежде всего действие, введенное в рубрике 1), называют (как я уже отметил) просто сложением двух векторов *1* и *2*. Оправдание такому названию находят в том, что здесь имеют силу определенные формальные законы, характеризующие сложение обыкновенных чисел, в частности — законы коммутативный и ассоциативный. Первый из них утверждает, что определение „суммы" не зависит от последовательности, в которой берут оба вектора *1*, *2*, второй — что прибавление суммы векторов *1* и *2* к вектору *3* дает тот же результат, что и прибавление вектора *1* к сумме векторов *2* и *3*.

Гораздо меньше оснований было назвать операции, определенные в рубриках 2) и 3), умножением, а именно, их различают как *внутреннее* или *скалярное* (рубрика 2) и как *внешнее* или *векторное* (рубрика 3) *умножение*. Здесь оказывается верным то важное свойство, которое называют *дистрибутивностью умножения относительно сложения* и которое заключается в равенстве $a_1(a_2 + a_3) = a_1a_2 + a_1a_3$; в самом деле, для внутреннего умножения имеем:

$$X_1(X_2 + X_3) + Y_1(Y_2 + Y_3) + Z_1(Z_2 + Z_3) =$$
$$= (X_1X_2 + Y_1Y_2 + Z_1Z_2) + (X_1X_3 + Y_1Y_3 + Z_1Z_3);$$

так же просто выводится аналогичное свойство для внешнего умножения. Что же касается других формальных законов умножения, — я ими подробно занимался в моем последнем курсе [1], — то упомяну еще только, что для внутреннего умножения имеет место и коммутативный закон ($a \cdot b = b \cdot a$); для внешнего же он несправедлив, ибо миноры матрицы, определяющей внешнее произведение, изменяют знак при перестановке векторов *1* и *2*.

Я хотел бы здесь еще отметить, что часто внешнее произведение двух полярных векторов определяют просто как „вектор", не подчеркивая в достаточной степени его аксиальный характер. Конечно, на основании вышеуказанного (стр. 86) соответствия общего характера, этот свободный плоскостный элемент тотчас же можно заменить вектором, что дает такое правило:

Внешним произведением двух векторов 1 и 2 является вектор 3 длины $r_1 \cdot r_2 \cdot |\sin\varphi|$, перпендикулярный к их плоскости и направленный так, чтобы взаимная ориентация векторов 1, 2, 3 была такая же, как и ориентация положительных x-, y- и z-осей (рис. 47). Не следует, однако, ни в коем случае забывать, что это определение весьма существенным образом зависит от рода системы координат и от масштаба.

Я не могу вполне понять, почему эта *терминология векторного анализа* так вкоренилась; возможно, конечно, что это связано с тем, что многим людям доставляют большое удовольствие такие формальные аналогии с обычными исстари употребляемыми арифме-

---

[1]) См. т. I, стр. 11 (10) и сл.

тическими действиями. Во всяком случае эти названия для операций над векторами являются по крайней мере в достаточной степени общепринятыми; но что вызвало широкое расхождение во мнениях, так это установление определенной символической записи для этих операций, в особенности для различных видов умножения. В предшествующем курсе[1]) я уже рассказал вам, как далеки еще мы здесь, несмотря на все старания, от соглашения. Между прочим, недавно на конгрессе математиков в Риме (1908) избрали даже интернациональную комиссию, которая должна предложить единую систему обозначений; но удастся ли внутри комиссии достигнуть соглашения, а также примут ли все остальные математики подобное предложение, это — вопрос будущего. Во всяком случае неимоверно трудно внести единообразие среди большого количества людей, из которых ни один не хочет расстаться со своими привычками, если только их не принуждают к этому сила закона или материальные интересы.

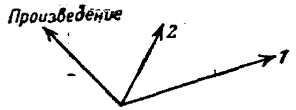

Рис. 47.

Я предпочитаю совсем не говорить здесь о системах обозначений векторного анализа, — иначе я рискую невзначай создать еще одну новую систему!

Прежде чем закончить этот экскурс, я хотел бы подчеркнуть со всей силой, что для нашей общей точки зрения вопросы обыкновенного векторного анализа представляют собою лишь часть обильного множества общих проблем. Ибо, например, скользящие векторы, связанные плоскостные элементы, винты и динамы в векторном анализе на первых порах совсем не принимаются во внимание. А между тем уже для действительного понимания операций самой векторной алгебры необходимо смотреть на них, как на части более обширного целого; только при таком условии ясно выступает лежащий в их основании принцип определения геометрических величин по их по-

[1]) См. т. I, стр. 100 (105).

ведению при различных видах ортогональных преобразований координат. Что касается литературы всех этих вопросов, то я назову вам, во-первых, работу, в которой я недавно вновь изложил наш общий принцип классификации и, в частности, применил его к упомянутой выше теории винтов: „Zur Schraubentheorie von Sir Robert Ball" („К теории винтов сэра Роберта Болла"), а во-вторых, рефераты в „Энциклопедии математических наук" Тимердинга [E. Timerding, Geometrische Grundlegung der Mechanik eines starren Körpers, Enz. IV, 2 („Геометрические основы механики твердого тела")] и Абрагама [(M. Abraham, Geometrische Grundbegriffe der Mechanik deformierbarer Körper, Enz. IV, 14 („Основные геометрические понятия механики деформируемых тел")].

[Добавление к изданию 1925 г.:

Созданная в Риме комиссия по унификации векторных обозначений тоже не имела, как и следовало ожидать, ни малейшего успеха. На следующем интернациональном конгрессе в Кембридже (1912) она вынуждена была объявить, что не успела закончить своих работ, и просить о продлении ее мандата до следующего конгресса, который должен был собраться в 1916 г. в Стокгольме, но не состоялся из-за войны. Такая же судьба, повидимому, постигнет и „Комиссию единиц и величин, входящих в формулы" („Ausschuss für Einheiten und Formalgrössen", сокращенно AEF). Последняя опубликовала в 1921 г. проект обозначения векторных величин и вызвала этим тотчас же самые резкие возражения с различных сторон. Этот проект напечатан в первом томе (1921) журнала „Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik" (стр. 421 и сл.), а возражения противников — во втором томе (1922) того же журнала.

Общеупотребительные теперь терминологии в векторном исчислении исторически возникли, главным образом, из двух источников: из гамильтонова исчисления кватернионов и из грассманова учения о притяжении. Трудно читаемые исследования Грассмана оставались, как было уже упомянуто, неизвестными немецким физикам; они долгое время составляли как бы тайное учение узких математических кругов. Напротив, гамильтоновы идеи проникли в английскую физику, прежде всего благодаря

Максвеллу (Maxwell). Но все же в своем „Трактате по электричеству и магнетизму" („Treatise on Electricity and Magnetism", два тома, Oxford 1873) Максвелл почти всюду пишет векторные уравнения при помощи компонент. Из боязни быть непонятым, он очень мало пользуется особым способом обозначения, хотя, по его мнению, для многих целей в физических рассуждениях является желательным избегать введения координат и с самого начала сосредоточивать внимание на самой точке в пространстве, вместо трех ее координат, и на направлении и величине силы, вместо ее трех компонент.

То, что теперь называют векторным исчислением физиков, восходит к работам английского инженера по телеграфии Хевисайда (Heaviside) и американца Гиббса (J. W. Gibbs).

Последний в 1881 г. выпустил свои „Elements of Vector-Analysis" („Элементы векторного анализа"). Хотя Хевисайд, как и Гиббс, принадлежит к школе Гамильтона, однако оба они включают в свое исчисление идеи Грассмана. И вот по такому-то окольному пути, через работы этих авторов, в немецкую физику проникает векторное исчисление, а с ним — грассманово учение о протяжении и гамильтоново исчисление кватернионов. Первой книгой, которая ознакомила круги немецких физиков с векторным исчислением, и именно в том виде, в каком его разработал Хевисайд, было появившееся в 1894 г. „Введение в максвеллову теорию" („Einführung in die Maxwellische Theorie") Фёппля (A. Föppl).

У Грассмана и у Гамильтона можно констатировать то общее, что оба они ставят своей целью оперировать с самими направленными величинами и только впоследствии переходить к компонентам. Замечательно, что оба они обобщили значение слова „произведение". Возможно, что это связано с тем, что свои теории они заранее связывают с учением о многочисленных комплексных (гиперкомплексных) числах (ср. наше изложение теории кватернионов в I томе, стр. 89 (94) и сл.). Но во всем остальном, как уже было указано, технические выражения у того и другого совершенно различны. Грассману принадлежат названия линейный элемент (Linienteil), плоскостный элемент (Ebenenteil), плоскостная величина (Plangrösse), внутреннее и внешнее произведение, тогда как Гамильтон ввел термины скаляр, вектор, скалярное и векториальное произведения.

В связи с тем, что ортодоксальные во всем прочем последователи Грассмана заменили очень целесообразные обозначения учителя отчасти другими, а физики смешали воедино, либо модифицировали имеющиеся терминологии, а также проявили крайне большой произвол по отношению к знакам отдельных операций, получается, наконец, даже для специалиста, большая неразбериха в этой, математически совершенно простой, области. В этой путанице надежной путеводной звездой является принцип, высказанный на стр. 52. Следуя ему, можно так охарактеризовать теории Гамильтона и Грассмана: тогда как Грассман в своем „учении о линейном протяжении" занимается теорией инвариантов, которые принадлежат к группе „аффинных" [1]) преобразований, не меняющих положения начала координат, тот же Грассман в своем „полном учении о протяжении" и Гамильтон в своем „исчислении кватернионов" кладут в основу своих исследований группу вращений. При этом Гамильтон поступает совершенно наивным образом: он не знает того, что выбор ортогональной группы допускает известный произвол. Наряду с этим могут возникнуть, как уже было объяснено, новые различия в связи с тем, что мы один раз допускаем, а в другой отбрасываем, как нечто излишнее, инверсию, т. е. зеркальное отображение (относительно начала) всех координатных осей.

Можно лучше всего уяснить себе все положение дел на примере понятий „внешнее произведение" (свободный плоскостный элемент), „векторное произведение" и „вектор". Тот, кто избирает группу ортогональных преобразований, исключая при этом инверсию, тот не делает никакой разницы между этими тремя величинами. Поэтому Грассман в своем „полном учении о протяжении" изображает свободный плоскостный элемент (параллелограм, снабженный определенным обходом) посредством вектора, который он называет „дополнением" этого плоскостного

[1]) В настоящей книге об этих преобразованиях речь будет впереди (ср. стр. 121 и сл.).

элемента и который вполне соответствует вектору, называемому физиками векторным произведением. Если же допущена инверсия, то „плоскостный элемент“ и „векторное произведение“ следует считать геометрическими величинами одного рода, отличными, однако, от „вектора“. Это соответствует обычному в физике разделению векторов на полярные и аксиальные. Переходя же к группе аффинных преобразований, уже нельзя считать грассманов свободный плоскостный элемент и векторное произведение геометрическими величинами одного и того же рода.]

V. ПРОИЗВОДНЫЕ ОСНОВНЫХ ОБРАЗОВ

Этим закончено все то, что я хотел здесь сказать об элементарных образах геометрии, и мне осталось только рассмотреть образы высшего порядка, которые могут быть из них составлены. Я сделаю это в исторической форме, для того чтобы вы получили определенную картину развития геометрии в различные века.

А. До конца XVIII столетия в качестве элементарных образов употребляли по существу только точки; иного рода образы, правда, встречались при случае, но никогда это не происходило систематически. В качестве производных образований (Erzeugnisse) точек рассматривали кривые и поверхности, а также более общие конфигурации, составленные из частей различных кривых и поверхностей. Задумаемся на минуту над тем, до чего многообразна относящаяся сюда область:

1) В элементарном преподавании, а иногда и в начальном курсе лекций по аналитической геометрии, все выглядит так, как если бы вся геометрия ограничивалась прямою и плоскостью, коническими сечениями и поверхностями второго порядка. Конечно, это — крайне узкая точка зрения, тем более, что уже знания древних греков простирались отчасти дальше — на некоторые высшие кривые, которые они рассматривали, как „геометрические места“; однако эти вещи тогда еще не проникли в регулярное преподавание.

2) Сравним с этим уровень знаний около 1650 г., вслед затем, как Ферма (Fermat) и Декарт (Descartes) создали аналитическую геометрию. Тогда различали гео-

метрические и механические кривые; первыми были, прежде всего, конические сечения, но также и отдельные высшие кривые из числа тех, которые теперь называют алгебраическими кривыми; вторым названием обозначали кривые, которые можно было определить при помощи какого-нибудь механизма; сюда относятся, например, циклоиды, образуемые при качении колеса; по большей части они принадлежат к „трансцендентным кривым".

3) Кривые того и другого рода принадлежат к числу аналитических кривых, понятие о которых было установлено позже; это — кривые, координаты x, y которых могут быть представлены как аналитические функции некоторого параметра t, короче говоря, — как степенные ряды относительно t.

4) В последнее время много занимались неаналитическими кривыми, координаты $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$ которых уже не разлагаются в степенной ряд, будучи, например, непрерывными функциями без производных: этим устанавливается более общее понятие о кривой, по отношению к которому вышеназванные аналитические кривые являются лишь особенно простым частным случаем.

5) Наконец, в самое последнее время благодаря развитию теории множеств, о которой мы уже говорили [1]), присоединился еще один, ранее совсем неизвестный объект, а именно — бесконечные точечные множества. Это — совокупности бесконечного количества точек, скопления точек, которые хотя и не образуют непременную кривую, но определяются вполне определенным законом. Если кому-нибудь желательно найти в наших конкретных наглядных представлениях нечто приблизительно соответствующее этим точечным множествам, тот пусть, например, представит себе на звездном небе млечный путь, в котором, чем точнее его рассматривают, тем больше находят звезд. Конечно, при этом сомнении точная бесконечность абстрактной теории множеств заменяется бесконечностью аппроксимационной (занимающейся приближениями) математики.

[1]) Ср. т. I, стр. 373 (408) и сл.

Для дисциплин, намеченных в этом кратком перечне, в частности для инфинитезимальной геометрии (геометрии бесконечно малых или диференциальной геометрии) и для теории точечных множеств, в рамках этого курса, к сожалению, не останется больше места, хотя они, конечно, также являются важными областями геометрии [1]). Впрочем, их часто излагают подробно в особых курсах лекций и книгах, так что здесь мы можем ограничиться этим указанием на занимаемое ими место среди прочих геометрических дисциплин, с тем, чтобы заняться более детально вещами, которые реже излагаются в других местах.

Но сперва я хотел бы в связи с этим перечислением остановиться на различии между аналитической и синтетической геометрией, связанном с рассмотренными областями.

По своему первоначальному значению синтез и анализ являются различными способами изложения: синтез начинает с частностей и составляет из них все более и более общие и, наконец, самые общие понятия; анализ же, напротив, кладет в основу самое общее и расчленяет его на все более и более мелкие отдельные частные случаи. Таков именно смысл различия, выражаемого названиями: синтетическая и аналитическая химии. В школьной геометрии также говорят соответственно этому об анализе геометрических построений: принимают, что искомый треугольник найден, и расчленяют поставленную задачу на отдельные частные задачи. Но в высшей математике эти слова удивительным образом приобрели совершенно иной смысл: здесь синтетической называют ту геометрию, которая изучает фигуры, как таковые, без помощи формул, тогда как аналитическая геометрия последовательно пользуется формулами, устанавливаемыми после введения подходящей системы координат. Конечно, при правильном понимании, между обоими видами геометрии можно усмотреть только количественную разницу (gradueller Unterschied, разницу в степени), зависящую от того, выдвигаются ли на первое место больше формулы или

[1]) Об этих вещах будет кое-что сказано в III т. этого сочинения.

фигуры. Ту аналитическую геометрию, которая совершенно абстрагируется от геометрических представлений, вряд ли еще можно назвать геометрией; а с другой стороны, синтетическая геометрия не может далеко уйти, если она не привлекает для точного выражения своих результатов целесообразного языка формул. Следуя такому пониманию, мы и поступали до сих пор, с самого начала применяя формулы, а затем уже задавая себе вопрос об их геометрическом значении.

Но как и всюду, так и в математике люди склонны к образованию партий, и таким образом возникли школы чистых синтетиков и чистых аналитиков, которые больше всего ценили абсолютную „чистоту метода" и, следовательно, были более односторонни, чем того требует природа вещей. В результате геометры-аналитики часто тонули в слепых вычислениях, не связанных ни с какими геометрическими представлениями, тогда как синтетики все спасение видели в искусственном избегании каких бы то ни было формул и при этом кончали тем, что развивали свой собственный, уклоняющийся от обычного язык формул. Такие преувеличения в следовании объективным самим по себе принципам, лежащим в основе, всегда приводят в научных школах как бы к процессу окаменения, и тогда новый толчок науке, существенным образом ускоряющий ее развитие, чаще всего приходит со стороны „outsidern" (внепартийных людей или „сторонних наблюдателей"). Так и здесь, в геометрии, лишь специалисты по теории функций впервые выявили, например, различие между аналитическими и неаналитическими кривыми, которое никогда не отмечалось в достаточной степени ни в работах ученых представителей, ни в учебниках обеих названных школ. Точно так же, только физики, как было уже упомянуто, дали ход векторному анализу, хотя его основные понятия имеются уже у Грассмана; и все же в учебниках геометрии часто еще и теперь почти не упоминается о векторах, как о самостоятельных вещах!

Не раз находились сторонники того, чтобы геометрию, как самостоятельный предмет преподавания, отделить от математики и чтобы вообще разделить математику в деле обучения на ее отдельные дисциплины; и, действительно, были созда́ны, особенно в иностранных высших школах, отдельные профессуры по геометрии, алгебре, диференциальному исчислению и т. д. Однако из наших последних соображений можно как раз сделать тот вывод, что установление таких тесных границ не находит себе оправдания; напротив в каждой науке должно быть по возможности допущено живое взаимодействие между различными действующими в ней направлениями интересов, так, чтобы каждое из них чувствовало себя в принципе представителем всей математики. Я подаю даже голос, следуя той же идее, также за как можно более живую связь математиков с представителями других наук.

Закончим на этом наш экскурс и обратимся, продолжая следовать историческому развитию, к рассмотрению

В. мощного импульса, полученного геометрическим исследованием, начиная с 1800 г., когда на передний план выступила так называемая новая геометрия. В настоящее время мы охотнее называем ее проективной геометрией, так как в ней главную роль играет операция проектирования, — нам придется позже подробнее о ней говорить; хотя и в настоящее время часто еще употребляют название „новая", но это, собственно говоря, неуместно, ибо с того времени много раз появлялись другие все более „новые" тенденции. В качестве одного из первых новаторов я должен здесь назвать Понселе (J. V. Poncelet), который в 1822 г. опубликовал свой „Traité des propriétés projectives des figures" [1]) („Трактат о проективных свойствах фигур").

В дальнейшем развитии этой проективной геометрии снова играло роль с самого начала различие между синтетическим и аналитическим направлениями; в качестве представителей первого направления я назову немецких исследователей Штейнера (J. Steiner) и Штаудта (Ch. v. Staudt), в качестве представителей второго — наряду с Мёбиусом, прежде всего Плюккера. Вы видите здесь основные произведения и этих геометров; они еще и теперь не утратили своего живого влияния; это — „Systematische Entwicklung der Abhängigkeit geometrischer Gestalten voneinander" („Систематическое

[1]) 2. éd. Paris 1865/66.

развитие взаимной зависимости геометрических образов") [1]) Штейнера, „Geometrie der Lage" („Геометрия положения") [2]) Штаудта, „Baryzentrischer Kalkul" („Барицентрическое исчисление") [3]) Мёбиуса и, наконец, „Analytischgeometrische Entwicklungen" („Аналитико-геометрические исследования") [4]) Плюккера.

Чтобы отметить важнейшие руководящие идеи этой „новой" геометрии, я в первую очередь остановлюсь

1) как на главной заслуге Понселе, на том, что он первый высказал ту мысль, что для точки существуют равноценные образы, а именно на плоскости точке можно противопоставить неограниченную прямую, в пространстве же — неограниченную плоскость, что в большей части геометрических предложений всегда можно слово „точка" заменить словом „прямая" или, соответственно, „плоскость". Это — выражение принципа двойственности.

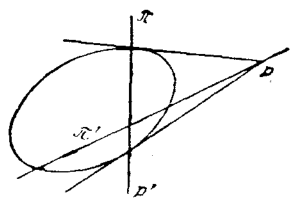

Рис. 48.

Понселе примыкает в развитии своих идей к теории поляр конических сечений [„Théorie des polaires réciproques" („Теория взаимных поляр")]. По отношению к определенному коническому сечению каждой точке p принадлежит (соответствует), как известно, некоторая прямая π в качестве ее поляры; последнюю можно определить, например, как прямую, соединяющую точки касания двух касательных к этому коническому сечению, проведенных из точки p [если (рис. 48) p лежит вне кривой]. Наоборот, каждой прямой π принадлежит некоторый полюс p, причем имеет место такой „закон взаимности": поляра π' любой точки p', лежащей на π, проходит через p. Из этого, осуществляемого при помощи

[1]) Berlin 1832; Gesammelte Werke Bd. I (Berlin 1881), S. 229, ff. Перепечатано в собрании „Ostwalds Klassiker der exakten Wissenschaften", № 82, 83.

[2]) Nürnberg 1847.

[3]) Цитировано на стр. 37.

[4]) 2 тома, Essen 1828, 1831.

конического сечения, частного случая соответствия между прямыми и точками на плоскости, а также из аналогичного соотношения между точками и плоскостями в пространстве по отношению к какой-нибудь поверхности второго порядка. Понселе заключил, что все предложения геометрии, которые относятся только к свойствам положения, ко взаимной принадлежности (или „встрече") точек, прямых и плоскостей, могут быть „дуализированы" указанным выше способом. Знаменитый пример дает теорема Паскаля о шестиугольнике, вписанном в коническое сечение, которая при „дуализировании" (т. е. согласно принципу двойственности) переходит в теорему Брианшона о шестистороннике из касательных, описанном около этого же конического сечения.

2) Впоследствии очень скоро пришли к более глубокому пониманию принципа двойственности. Его отделили от теории поляр и стали рассматривать как источник всего своеобразного построения проективной геометрии. Эта прекрасная систематика впервые появляется у Жергона (Gergonne) и Штейнера. Вы должны бы прочесть хотя бы в предисловии к „Систематическому развитию" Штейнера[1]) то место, где он в восторженных выражениях рисует картину того, как проективная геометрия впервые вносит порядок в хаос геометрических предложений и как в ней все размещается совершенно естественным образом.

В течение нашего курса нам еще часто придется говорить об этой систематике, но уже теперь я хотел бы дать краткий обзор ее. При этом принцип двойственности будет проявляться в том, что точка и плоскость — или соответственно (если ограничиваться плоскостью) точка и прямая — входят в основные понятия и предложения („аксиомы") геометрии всегда совершенно симметрично, т. е. что эти аксиомы, а значит и логически выводимые из них предложения, всегда попарно двойственны. Так называемые „метрические соотношения" элементарной геометрии (как, например, расстояние,

[1]) См. сочинение, указанное на стр. 101.

угол,...) вначале совсем не входят в эту систематику; позже мы увидим, как они могут быь дополнительно включены в нее. Ближе это построение выглядит так:

a) В основу кладутся три рода образов в качестве простейших: точка, (неограниченная) прямая, (неограниченная) плоскость.

b) Между этими основными образами имеют место следующие соотношения (называемые „предложениями или аксиомами сочетания" — „Verknüpfungssätze"), недопускающая исключений значимость которых достигается искусным введением несобственных (бесконечно удаленных) элементов, каковое введение впоследствии будет разъяснено более подробно: 2 точки определяют прямую; 3 точки, не лежащие случайно на одной прямой, определяют плоскость; 2 плоскости определяют прямую; 3 плоскости, не проходящие через одну прямую, определяют точку.

c) Теперь образуем линейные основные образы (т. е. такие, которые аналитически определяются линейными уравнениями):

I. Основные образы 1-й ступени, каждый из ∞' элементов:

α) Совокупность всех точек одной прямой: прямолинейный ряд точек.

β) Совокупность всех плоскостей, проходящих через одну прямую: пучок плоскостей.

γ) Все прямые на плоскости, проходящие через одну точку: (плоский) пучок прямых.

II. Основные образы 2-й ступени, из ∞^2 элементов каждый:

α) Плоскость как геометрическое место ее точек: поле (плоская система) точек.

α') Плоскость как геометрическое место ее прямых: поле (плоская система) прямых.

β) Плоскости, проходящие через одну неподвижную точку: связка плоскостей.

β') Прямые, проходящие через одну неподвижную точку: связка прямых.

III. Основные образы 3-й ступени, из ∞^3 элементов каждый:

α) Пространство как место его точек: пространство (пространственная система) точек.

β) пространство как место его плоскостей: пространство (пространственная система) плоскостей.

Во всем этом построении действительно всюду отчетливо выступает полная двойственность; исходя из данных таким образом оснований, можно возвести все здание проективной геометрии двумя способами, находящимися в отношении взаимности друг к другу: при одном способе берем за исходный материал точки, при другом — прямые, если речь идет о геометрии на плоскости, или плоскости, если занимаемся геометрией в пространстве.

3) Это построение снова можно представить в более удобном виде, если дальше перейдем на путь анализа и для этого посмотрим прежде всего, какую форму принимает принцип двойственности у Плюккера. Как известно, уравнение прямой на плоскости, если его свободный член не равен нулю, можно записать так

$$ux + vy + 1 = 0.$$

Эта прямая будет определена, если известны значения коэфициентов u, v, которые, между прочим, в этой записи фигурируют совершенно симметрично с текущими координатами x, y. Мысль Плюккера и состоит в том, чтобы рассматривать u, v как „координаты прямой“, равноправные с координатами x, y точки, и при подходящих обстоятельствах считать их переменными вместо этих последних.

При этом новом толковании x, y имеют постоянные значения, и наше уравнение выражает условие того, что некоторая переменная прямая проходит через неподвижную точку x, y; т. е. оно является уравнением этой точки в координатах прямой. Наконец, можно не оказывать предпочтения ни одному из обоих образов в способе выражения и вовсе не указывать, какая именно пара величин рассматривается как постоянная и какая — как переменная; тогда наше уравнение представит собой условие „Совокупного положения“ (или „встречи“) (Vereinigte Lage) точки и прямой. Принцип двойственности как раз и опирается на тот факт, что рассматриваемое уравнение совершенно симметрично относительно x, y, с одной стороны, и u, v, с другой, — и в этом свойстве заключается все то, что мы раньше понимали под „двойственностью“, присущей теоремам сочетания.

Естественно, что в пространстве на место уравнения прямой становится уравнение плоскости:

$$ux + vy + wz + 1 = 0.$$

В результате этих соображений можно аналитически развивать геометрию, принимая за основные переменные либо x, y, z, либо u, v, w; при этом слова „точка“ и „плоскость“ просто переставляются. Таким образом возникает известное двойственное построение геометрии, которое во многих учебниках подчеркнуто, выражается тем, что слева и справа от вертикальной черты помещаются взаимные теоремы.

Окинем теперь быстрым взором возникающие таким образом, всегда взаимно двойственные, высшие образы! Это даст нам, как бы продолжение предыдущей двойственной в себе схемы линейных образов.

Начинаем с того, что рассматриваем x, y, z, как определенные, не сводящиеся к постоянным значениям, функции φ, χ, ψ некоторого параметра t. Эти функции определяют некоторую пространственную кривую, которая в частном случае (когда функции φ, χ, ψ тождественно удовлетворяют какому-либо линейному уравнению с постоянными коэфициентами) может быть плоской кривой или, наконец (если они удовлетворяют двум таким линейным уравнениям), вырождается в прямую. Точно также, рассматривая u, v, w как функции от t, получим однократно-бесконечную последовательность плоскостей, которую удобнее всего представить себе при помощи развертывающейся поверхности, огибающей эти плоскости.

Здесь один из частных случаев состоит в том, что все плоскости проходят через одну точку, т. е. огибаются некоторым конусом, а другой в том, что все они проходят через одну неподвижную прямую.

Рассматривая же x, y, z как функции двух параметров t, t', получим некоторую поверхность, которая в частности может выродиться в *плоскость*; дуальной к этому образу является *двухкратно-бесконечная совокупность плоскостей, огибаемых некоторой поверхностью*; вырождением этой совокупности служит *связка плоскостей, проходящих через одну неподвижную точку*.

Выпишем все эти результаты в виде такой таблички:

$\left.\begin{array}{l} x=\varphi(t) \\ y=\chi(t) \\ z=\psi(t) \end{array}\right\}$ **кривая** *(плоская кривая)* *(прямая)*	$\left.\begin{array}{l} u=\varphi(t) \\ v=\chi(t) \\ w=\psi(t) \end{array}\right\}$ **развертывающаяся поверхность** *(конус)* *(прямая)*
$\left.\begin{array}{l} x=\varphi(t,t') \\ y=\chi(t,t') \\ z=\psi(t,t') \end{array}\right\}$ **поверхность** *(плоскость)*	$\left.\begin{array}{l} u=\varphi(t,t') \\ v=\chi(t,t') \\ w=\psi(t,t') \end{array}\right\}$ **поверхность** *(точка)*

Это может служить в качестве достаточного примера тех двойственных схем, какие охотно составлялись в продолжение долгого времени.

4) Уже у Плюккера имеется весьма существенное дальнейшее развитие всего этого подхода. По аналогии с тем, как он рассматривает три коэфициента уравнения плоскости как ее переменные координаты, он приходит к мысли рассматривать вообще *постоянные*, от которых зависит какой-нибудь геометрический образ, — например девять коэфициентов уравнения поверхности второго порядка, — как *переменные координаты* этого образа и исследовать, что могут означать те или иные уравнения между ними. Конечно, здесь уже не может быть и речи о „двойственности" в буквальном смысле; она основывалась на специфическом свойстве уравнения плоскости или соответственно прямой (стр. 104) быть симметричным относительно коэфициентов и координат.

Сам Плюккер осуществил эту мысль, в частности, для случая *прямых в пространстве*. Прямая в пространстве определятся в координатах точки двумя уравнениями, которые Плюккер пишет в виде:

$$\left\{\begin{array}{l} x=rz+\rho, \\ y=sz+\sigma. \end{array}\right.$$

Четыре постоянные r, s, ρ, σ этих уравнений можно назвать координатами прямой в пространстве; нетрудно установить, как они связаны с употреблявшимися раньше (стр. 59) характеризующими прямую отношениями $X:Y:N$, которые мы составляли по двум ее точкам, следуя грассманову принципу. Так вот, Плюккер прежде всего рассматривает одно уравнение $f(x,s,\rho,\sigma)=0$ с этими четырьмя координатами; оно выделяет из четырехкратно-бесконечной $|\infty^4|$ совокупности прямых ее трехкратно-бесконечную часть $|\infty^3|$, которую он называет комплексом линий (Linienkomplex); о его простейшем случае, о линейном комплексе (linearer komplex) у нас уже шла речь (стр. 67). Два уравнения $f(r,s,\rho,\sigma)=0$, $g(r, s, \rho, \sigma)=0$ определяют конгруэнцию линий (Linienkongruenz), которую некоторые называют также системой лучей (Strahlensystem); первый термин должен указывать на то, что речь идет о прямых, общих обоим комплексам $f=0$, $g=0$. Наконец, три уравнения $f=g=h=0$ того же ряда определяют однократно-бесконечную совокупность $|\infty'|$ прямых, покрывающих некоторую поверхность, т. е. некоторую линейчатую поверхность.

Изложение всего этого Плюккер дал в своем произведении „Neue Geometrie des Raumes, gegründet auf die Betrachtung der geraden Linie als Raumelement“ [1]) (Новая геометрия пространства, основанная на рассмотрении прямой линии как элемента пространства“) 1868/69 г.; он умер, когда было почти закончено печатание первой части этого произведения, и я, как его тогдашний ассистент, должен был „заслужить шпоры“ изданием второй части.

Общий плюккеров принцип, применять любые образы как элементы пространства, а их постоянные — как координаты, давал и в дальнейшем повод к интересным исследованиям. Так выдающийся норвежский математик Софус Ли (Sophus Lie), который долгое время работал в Лейпциге, достиг больших успехов со своей шаровой геометрией. В ней за элемент пространства берется шар, который, как и прямая, зависит от четырех параметров.

---

1) Abt. 1. 2. Leipzig 1868 u. 1869.

Далее, я упомяну еще исследование Стюди (Study) „Geometrie der Dynamen“ [1]), которое относится к более позднему времени. В нем Стюди связывает со знакомым уже нам понятием динамы целый ряд интересных относящихся сюда изысканий.

C. За пределы этой „новой геометрии“, в которой все же основную роль играют неограниченная прямая и неограниченная плоскость как элементы пространства, выходит начатое в 1844 г. Грассманом развитие идей, ставящее на первое место ограниченные линейный, плоскостный и пространственный элементы и приписывающее им компоненты, следуя „принципу определителей“; об этом мы уже говорили подробно. Эти идеи прекрасны тем, что здесь мы идем навстречу потребностям механики и физики несравненно более плодотворным образом, чем это достигается, например, геометрией прямой или принципом двойственности.

Конечно, все эти направления ни в коем случае не являются столь резко обособленными, как это я здесь изобразил ради лучшего обзора. На самом деле все сводится только к тому, что Плюккер больше веса придавал понятию о неограниченной прямой, а Грассман — понятию о линейном элементе, хотя у каждого из них при случае встречается и другой образ. В частности, имя Стюди могло бы собственно быть упомянуто и в этой, как и в предыдущей рубрике.

Но я хочу еще подчеркнуть, что Грассман ни в коем случае не ограничивался непосредственно применимыми вещами; напротив, в своем свободном творчестве он выходил далеко за их пределы. Наиболее важным представляется то, что он ввел в рассуждения неопределенное число n координат точки $x_1, x_2, \ldots, x_n$ вместо трех кординат x, y, z и, таким образом, пришел к геометрии „n-мерного“ пространства R_n (или пространства n измерений), настоящим творцом которого является именно он. Следуя своему всеобщему принципу, он рассматривает в таком высшем пространстве матрицы из координат $2, 3, \ldots, n+1$ точек, миноры которых дают ему целый ряд основных образов в пространстве R_n, соответствующих линей-

[1]) Leipzig 1903.

ному и плоскостному элементам. Я уже упоминал, что получаемую таким образом абстрактную дисциплину Грассман назвал **учением о протяжении** (Ausdehnungslehre).

Эта идея пространства n измерений R_n получила в последнее время дальнейшее развитие в том отношении, что стали рассматривать **бесконечное количество координат** $x_1, x_2, x_3, \ldots$ in infin. (сокращение слов „in infinitum" = „в бесконечность" или „до бесконечности") и соответственно этому говорить о **бесконечно мерном пространстве** $R_\infty \ldots$ С тем, что такие рассуждения не лишены смысла, вы согласитесь, если вспомните, например, об операциях со степенными рядами: степенной ряд задается совокупностью всех своих бесконечно многих коэфициентов и может быть в силу этого изображен (истолкован) в виде точки в R_∞

При этом является замечательным и признаваемым теперь всеми математиками фактом то, что такой геометрический язык в случае n и даже бесконечно большого числа переменных доставляет действительную пользу; благодаря ему все рассуждения становятся гораздо живее, чем если держаться одних только аналитических выражений, и вскоре достигается такая ловкость в употреблении новых геометрических представлений, как если бы мы в R_n и в R_∞ находились у себя дома. Вопрос о том, что именно в действительности скрывается за этим явлением, и не сказывается ли здесь некоторое естественное предрасположение человека, которое только из-за ограниченности нашего опыта обыкновенно развивается лишь в двух и трех измерениях, — этот вопрос пусть решают психологи и философы!

Но если я должен здесь также ориентировать вас относительно роли математики в общей культуре, то следует еще в нескольких словах затронуть тот оборот, который придал идее многомерной геометрии в 1873 г. лейпцигский астроном Цёльнер (Zöllner). Здесь перед нами один из редких случаев проникновения во всеобщее сознание математической терминологии, — ведь теперь каждый человек употребляет обороты речи, содержащие „четвертое измерение". **Эта популяризация** „четвертого измерения" началась с тех опытов, какие спирит Слэт (Slate) проделал перед Цёльнером. Слэт выдавал себя за медиума, который находится в непосредственном общении с духами, и его сеансы заключались, между прочим, в том, что предметы по его желанию исчезали и вновь появлялись. Цёльнер отнесся доверчиво к этим экспериментам и создал для их объяснения такую физико-метафизическую теорию, которая получила широкое распространение: Истинные физические процессы протекают в пространстве четырех или еще большего числа измерений, мы же в силу наших природных данных можем воспринимать только некоторый трехмерный „вырезок" из него $x_n = 0$; но особенно предрасположенный медиум, который, например, находится в общении с существами, живущими вне нашего пространства, может по произволу как удалять из него предметы, — и они становятся тогда для нас невидимыми, — так и возвращать их обратно. Обыкновенно эти соотношения уясняют себе при помощи картины существ, которые связаны с какой-нибудь двумерной поверхностью и способны к восприятиям только в пределах этой последней; для примера представим себе образ жизни известного рода животных, хотя бы клещей. Если с поверхности, на которой живут эти существа, убрать какой-нибудь предмет, то для них (так себе это представляют) он будет казаться совершенно изчезнувшим; совершенно анологично представляет себе Цёльнер эксперименты Слэта. Было составлено много подробных описаний жизни таких двумерных существ; особенно занимательно делает это анонимный автор английского произведения „Flatland" („Плоская страна")[1]).

В нем автор очень точно описывает вид двумерного мира; отдельные существа различаются по своей геометрической форме, которая тем сложнее, чем выше их организация. Правильные многоугольники являются высшими существами; женщины, относительно которых автор держится очень неважного мнения, имеют просто форму черты и т. д.

---

[1]) „A romance of many dimensions", by a Square („Роман многих измерений" написал Квадрат). London 1884.

Автор в основном преследует здесь цель сделать постижимой возможность многомерной геометрии.

Конечно, мне здесь не приходится подробно распространяться о том, что математическое понимание многомерной геометрии не имеет ничего общего с метафизическими рассуждениями Цёльнера. Математика выступает здесь[1]), если употребить современный термин, в роли чисто нормативной науки, которая рассматривает формально возможные сочетания вещей и существует совершенно независимо от естественно-научных или от метафизических фактов.

После этого экскурса я хочу еще остановиться несколько подробнее на тех высших образах, которые можно поставить в качестве производных образований (Erzeugnisse) грассмановых элементарных образов, — в особенности векторов, — наряду с приведенными раньше производными образованиями точек, плоскостей и т. д. Мы приходим здесь к дальнейшему развитию векторного анализа в собственном смысле, который благодаря Гамильтону сделался одним из ценнейших орудий механики и физики; я предлагаю вашему вниманию переведенные на немецкий язык „Elemente der Quaternionen" [2]) Гамильтона, а также уже упомянутый раньше (стр. 94) „Vector Analysis" [3]) тоже очень заслуженного американца Гиббса.

Новая мысль, присоединяющаяся здесь к известным уже нам понятиям вектора и скаляра, заключается в том, чтобы связать эти величины с точками пространства: каждой точке (x, y, z) пространства относят определенный скаляр

$$S = f(x, y, z)$$

и говорят тогда о скалярном поле; с другой стороны, к каждой точке пространства прикладывают определенный вектор:

$$X = \varphi(x, y, z), \quad Y = \psi(x, y, z), \quad Z = \chi(x, y, z)$$

и совокупность этих векторов называют векторным полем.

---

[1]) [Подчеркиваю это слово „здесь", чтобы читатель не принял даваемое для данного случая определение математики за общую точку зрения Клейна.]

[2]) Deutsch von P. Glan, 2 тома, Leipzig 1882/84.

[3]) Ed. by E. B. Wilson, New York 1901.

Этим даны названия двум важнейшим геометрическим понятиям, которые в современной физике применяются на каждом шагу; достаточно будет очень немногих примеров, чтобы напомнить об их широком распространении. Плотность распределения массы, температура, потенциальная энергия в непрерывно протяженной системе, рассматриваемые каждая, как функция места, являются примерами скалярного поля. Поле сил, в котором к каждой точке приложена определенная сила, представляет типичный пример векторного поля. Дальнейшими примерами являются: в теории упругости поле сдвигов деформированного тела, если представить себе, что каждой точке отнесен отрезок, изображающий ее сдвиг; подобно этому в гидродинамике поле скоростей, наконец, в электродинамике электрическое и магнитное поля, в которых каждой точке отнесен определенный электрический или магнитный вектор.

В каждой точке можно из вектора магнитной силы поля, который по своей природе является аксиальным, и из полярного вектора электрической силы поля составить один винт; поэтому электромагнитное поле можно интерпретировать также, как пример винтового поля.

Гамильтон показал, как можно проще всего сделать эти поля доступными методам диференциального и интегрального исчислений.

В основе этого применения анализа лежат два замечания. Первое заключается в том, что диференциалы:

$$dx, dy, dz,$$

отношения которых определяют направление перемещения в данной точке пространства, изображают некоторый свободный вектор, т. е. что они ведут себя при преобразованиях координат, как компоненты свободного вектора. Это можно легко вывести из того, что они получаются путем предельного перехода из координат маленького отрезка, проходящего через точку x, y, z.

Второе, более важное, но в то же время и более трудное для понимания, замечание заключается в том, что символы $\frac{\partial}{\partial x}$,

$\frac{\partial}{\partial y}$, $\frac{\partial}{\partial z}$ частного диференцирования также имеют характер компонент свободного вектора, т. е. в том, что при переходе к новой прямоугольной системе координат x', y', z' новые символы $\frac{\partial}{\partial x'}$, $\frac{\partial}{\partial y'}$, $\frac{\partial}{\partial z'}$ получаются из старых таким же образом, как преобразованные координаты вектора (а именно полярного вектора) получаются из его первоначальных координат.

Это сразу же станет ясным, если действительно проделать соответствующие вычисления для вращения системы координат:

$$\left.\begin{aligned} x' &= a_1x+b_1y+c_1z, \\ y' &= a_2x+b_2y+c_2z, \\ z' &= a_3x+b_3y+c_3z. \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Эти формулы вращения характеризуются, как мы уже подробно излагали, (стр. 76), тем, что их решение получается простой перестановкой строк и колонн в системе их коэфициентов:

$$\left.\begin{aligned} x &= a_1x'+a_2y'+a_3z', \\ y &= b_1x'+b_2y'+b_3z', \\ z &= c_1x'+c_2y'+c_3z'. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Имея некоторую функцию от x, y, z, можем представить посредством (2) ее так же, как функцию от x', y', z'. По известным правилам частного диференцирования находим:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x'} &= \frac{\partial}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial x'}+\frac{\partial}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial x'}+\frac{\partial}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial x'}, \\ \frac{\partial}{\partial y'} &= \frac{\partial}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial y'}+\frac{\partial}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial y'}+\frac{\partial}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial y'}, \\ \frac{\partial}{\partial z'} &= \frac{\partial}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial z'}+\frac{\partial}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial z'}+\frac{\partial}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial z'}. \end{aligned}$$

Входящие сюда частные производные от x, y, z по x', y', z' можно сразу найти из (2), после чего получается:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x'} &= a_1\frac{\partial}{\partial x}+b_1\frac{\partial}{\partial y}+c_1\frac{\partial}{\partial z}, \\ \frac{\partial}{\partial y'} &= a_2\frac{\partial}{\partial x}+b_2\frac{\partial}{\partial y}+c_2\frac{\partial}{\partial z}, \\ \frac{\partial}{\partial z'} &= a_3\frac{\partial}{\partial x}+b_3\frac{\partial}{\partial y}+c_3\frac{\partial}{\partial z}. \end{aligned}$$

Сравнивая этот результат с (1), замечаем действительно совпадение с формулами преобразования координат точки, а значит, и компонент вектора.

Гораздо более простое вычисление показало бы точно так же, что при сдвиге системы координат три символа $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}$ вообще не изменяются, при инверсии же они изменяют знак, чем и доказывается наше утверждение. Но только при этом мы не считались с изменениями масштаба, т. е. не обращали внимания на измерение (Dimension); принимая же его во внимание, найдем, что наши символы имеют измерение, равное — 1, ибо диференциалы координат входят в их знаменатели.

Над этим векторным символом $\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$ Гамильтона мы будем производить те же операции, какие мы раньше производили над векторами. Начну с того замечания, что результат применения операции $\frac{\partial}{\partial x}$ к некоторой функции $f(x, y, z)$, т. е. $\frac{\partial f}{\partial x}$, можно рассматривать как символическое произведение из $\frac{\partial}{\partial x}$ и f, ибо формальные законы умножения, поскольку они будут играть роль в дальнейшем, в частности дистрибутивность $\left(\frac{\partial (f+g)}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial x}\right)$, остаются в силе для этого сочетания операций.

Пусть теперь задано скалярное поле $S = f(x, y, z)$; умножаем, в установленном только что смысле, этот скаляр на компоненты векторного символа Гамильтона, т. е. образуем вектор:

$$\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}.$$

Раньше мы видели (стр. 88), что произведение скаляра на вектор является снова вектором, а так как при доказательстве этого предложения приходится опираться только на такие свойства умножения, которые имеют место и при нашем символическом умножении, то выходит, что эти три частные производные скалярного поля определяют вектор, зависящий еще от точки x, y, z, т. е.

векторное поле; оно находится со скалярным полем в определенной связи, характер которой не зависит от того или другого выбора системы координат. Этому векторному полю, взятому со знаком минус, дают название, заимствованное из метеорологии, а именно, „градиент скалярного поля". Так, например, в известных картах погоды, помещаемых в газетах, атмосферное давление в каждом месте представлено в виде скалярного поля S, при помощи кривых $S = \text{const}$, возле которых выписаны принадлежащие им значения S; тогда градиент дает направление быстрейшего падения атмосферного давления и оказывается всегда нормальным к этим „кривым (равного) уровня".

Из трех компонент X, Y, Z вектора всегда можно (ср. стр. 87) составить скаляр $X^2 + Y^2 + Z^2$; в частности из градиентов любого скаляра получаем новое скалярное поле

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2,$$

которое должно быть связано некоторым, независящим от системы координат образом с векторным полем этого градиента, а значит, и с первоначальным скалярным полем. Этот скаляр, как известно, равен квадрату длины градиента или, как говорят, равен квадрату падения скалярного поля.

Применяя еще раз это же предложение, образуем из самого векторного символа $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}$ некоторый символический скаляр, путем символического умножения каждой из его компонент на самое себя, т. е. применяя дважды обозначаемую ею операцию. Это дает операцию:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2},$$

которая, следовательно, имеет скалярный характер, т. е. остается неизменной при преобразованиях координат.

При „умножении" этого скалярного символа на скалярное поле f обязательно должно снова получиться скалярное поле:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2},$$

которое с первоначальным полем связано независящим

8*

от системы координат образом. Если представить себе текущую в этом поле жидкость, плотность которой первоначально равна единице, и скорость которой в каждой точке задана градиентом поля f, то за первый момент dt плотность возрастает в каждой точке на величину, равную произведению этого скаляра (в этой точке) на dt. Поэтому

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\right)$$

называют дивергенцией (расхождением) градиента поля f.

Прежде пользовались, вслед за Ламэ (Lamé), такой терминологией: скалярное поле $S=f(x, y, z)$ называли функцией точки (fonction du point), первое связанное с ним скалярное поле $\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2$ — первым диференциальным параметром, а второе скалярное поле $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$ — вторым диференциальным параметром.

Теперь мы будем подобным же образом комбинировать наш векторный символ $\frac{\partial}{\partial x}$, $\frac{\partial}{\partial y}$, $\frac{\partial}{\partial z}$ с заданным (полярным) векторным полем:

$$X=\varphi(x, y, z), \quad Y=\chi(x, y, z), \quad Z=\psi(x, y, z),$$

применяя оба рода умножения двух векторов, с которыми мы раньше познакомились.

a) Путем внутреннего умножения возникает скаляр, который при уже знакомом нам истолковании символического умножения на $\frac{\partial}{\partial x}$ принимает такой вид:

$$\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z}.$$

Конечно, он в свою очередь зависит от x, y, z и представляет, поэтому, некоторое скалярное поле; между этим последним и данным векторным полем существует соотношение, независящее от системы координат. Это поле называется дивергенцией исходного, в смысле данного выше определения.

b) Внешнее умножение дает матрицу:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ X & Y & Z \end{vmatrix},$$

ее тремя определителями являются выражения:

$$\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z}, \quad \frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x}, \quad \frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}.$$

Согласно предыдущему, они определяют собой некоторый плоскостный элемент или аксиальный вектор или соответственно аксиальное векторное поле, причем характер связи обоих полей опять-таки оказывается независимым от выбора системы координат. По Максвеллу, это векторное поле называют Curl'ем (английское слово Curl — локон, завиток) заданного; в Германии наряду с этим словом употребляют также немецкое слово Quirl — мутовка, мешалка), происходящее от того же самого германского корня; иногда говорят также ротор (Rotor — „вращатель") или ротация (Rotation — коловращение) (в русской литературе пользуются терминами вихрь, ротор, завиток, вихревой вектор).

Теперь мы уже получили путем систематического геометрического исследования все те величины, которые физик всегда должен иметь под рукой при своих исследованиях различнейших векторных полей. То, чем мы здесь занимались, является чистой геометрией. Я должен это как можно сильнее подчеркнуть, так как на эти вещи часто смотрят, как на принадлежащие физике, и соответственно этому излагают их в книгах и лекциях по физике, а не по геометрии.

Но это лишено всякого объективного основания и может быть понято лишь как дань историческому развитию, ибо в свое время физика должна была в этом случае сперва сама создать себе то орудие, в котором она нуждалась и которого не имелось тогда еще в готовом виде в арсенале математики.

Здесь мы снова встречаемся с тою же несуразностью, на какую я уже неоднократно должен был обращать ваше внимание в прошлом семестре в области анализа. С течением времени в физике развивались всякого рода математические потребности, и это не раз сообщало крайне ценные импульсы математической науке. А между тем преподавание математики, особенно в той форме, какую оно еще до сих пор по большей части имеет в школах, не учитывает этих изменений; оно продолжает двигаться по старым, проторенным в продолжение столетий путям и представляет физике самой биться над налаживанием своих вспомогательных средств, хотя их математическая обработка дала бы для преподавания математики гораздо более подходящий материал, чем многие вещи, сохраняемые в нем в силу стародавних традиций. Как видите, и в духовной жизни имеет место своего рода закон инерции; все продолжает итти прямо вперед по своему старому пути, и каждому изменению, каждому переходу на новые современные пути противодействует большое сопротивление.

На этом я заканчиваю первый раздел, который познакомил нас с самыми различными видами геометрических образов, с объектами геометрии.

Теперь мы должны заняться особым методом, который имеет огромнейшее значение для более точного исследования этих образов.

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

Глава, которую мы теперь начинаем, является одной из важнейших в научной геометрии. Но ее основные идеи, а также простейшие ее части дают, — это мне особенно желательно отметить в настоящем курсе, — также очень оживляющий материал для школьного преподавания; ведь в конце концов геометрические преобразования являются не чем иным, как обобщением простого понятия о функции, которое наши современные тенденции к реформе стремятся всюду поставить в центр всего преподавания математики.

Я начинаю с рассмотрения точечных преобразований, которые образуют простейший класс геометрических преобразований. При них точка остается элементом пространства, т. е. они относят к каждой точке опять-таки некоторую точку, — в противоположность таким преобразованиям, которые переводят точку в другие элементы пространства, как, например, в прямые, плоскости, шары и т. п. Я и здесь на первое место выдвигаю аналитическую трактовку вопроса, так как она всегда делает возможным наиболее точное выражение фактов.

Аналитическим изображением точечного преобразования является то, что в анализе называют введением новых переменных x', y', z', заданных, как функции старых переменных x, y, z:

$$\begin{aligned} x' &= \varphi\ (x, y, z), \\ y' &= \chi\ (x, y, z), \\ z' &= \psi\ (x, y, z). \end{aligned}$$

Такую систему уравнений можно, конечно, интерпретировать в геометрии двумя различными способами, я сказал бы — активно и пассивно. Пассивно она представляет собой изменение системы координат, т. е. (неподвижной) точке с координатами x, y, z приписываются новые координаты x', y', z'. Именно таким истолкованием мы до сих пор постоянно и пользовались при изучении изменений прямоугольной системы координат; в случае более общего рода функций φ, χ, ψ эти формулы охватывают сверх того также переход к системам координат совершенно иной природы, как, например, треугольным, полярным, элиптическим и др. координатам.

В противоположность этому при активном понимании фиксируют систему координат, а преобразовывают само пространство.

С каждой точкой x, y, z сопрягают точку x'. y', z' и этим, действительно, устанавливают некоторое преобразование точек пространства; это и является тем толкованием, с которым мы в дальнейшем будем постоянно иметь дело.

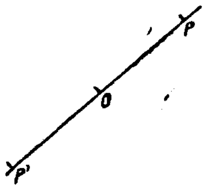

Рис. 49.

Следуя этим разъяснениям, мы получим, конечно, первые примеры точечных преобразований, истолковывая активно те формулы, которые раньше (стр. 74 и сл.), — при пассивном понимании, — изображали сдвиг, вращение, зеркальное отображение, изменение масштаба прямоугольной системы координат. Можно очень легко убедиться в том, что первые две из упомянутых групп формул дают сдвиг и соответственно вращение около O пространства, рассматриваемого, как твердое тело по отношению к неподвижной системе координат; третья группа дает инверсию точек пространства относительно начала O [с каждой точкой x, y, z сопрягаем точку $-x$, $-y$, $-z$, симметричную с нею относительно O (рис. 49)]; наконец, последняя группа представляет собой так называемое преобразование подобия всего пространства с центром подобия в точке O.

Наши собственные исследования мы начинаем с одной особенно простой группы точечных преобразований, которая обнимает все названные преобразования как частные случаи — с группы аффинных преобразований.

I. АФФИННЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

Аффинное преобразование аналитически определяется тем, что x', y', z' являются произвольными целыми линейными функциями от x, y, z:

$$\left.\begin{aligned} x' &= a_1x+b_1y+c_1z+d_1,\\ y' &= a_2x+b_2y+c_2z+d_2,\\ z' &= a_3x+b_3y+c_3z+d_3.\end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Это название (латинское прилагательное affinis, от слов *ad* — „к“, „у“ и finis — конец, означает „смежный“), которое восходит к Мёбиусу и еще далее к Эйлеру, должно выражать, что при таком преобразовании бесконечно удаленным точкам всегда соответствуют опять-таки бесконечно удаленные точки, т. е. что, так сказать, „концы“ пространства сохраняются (переходят друг в друга); в самом деле, из этих формул немедленно получается, что x', y', z' становятся бесконечными одновременно с x, y, z.

В противоположность этому, при подлежащих позже нашему изучению общих проективных преобразованиях, при которых x', y', z' являются дробно-линейными функциями от x, y, z, некоторые, лежащие на конечном расстоянии, точки преобразовываются в бесконечно удаленные в связи с указанным видом функций. В физике эти аффинные преобразования, под названием однородных деформаций, играют очень большую роль; слово „однородный“ выражает здесь (в противоположность „разнородному“) независимость коэфициентов от рассматриваемого места в пространстве, слово же „деформация“ напоминает о том, что при этом преобразовании, вообще говоря, изменяется форма всякого тела.

Преобразование (1) можно, очевидно, составить из сдвигов пространства на величины d_1, d_2, d_3 параллельно трем координатным направлениям и из однородного линейного преобразования, уже не содержащего более свободных (постоянных) членов:

$$\left.\begin{aligned} x' &= a_1x+b_1y+c_1z,\\ y' &= a_2x+b_2y+c_2z,\\ z' &= a_3x+b_3y+c_3z,\end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

которое оставляет неизменным положение начала (центрально-аффинное преобразование) и является несколько более удобным для исследования. Мы начинаем рассмотрение этого типа (2)

1) с вопроса разрешимости системы уравнений (2). Как учит теория определителей, вопрос сводится к тому, исчезает ли или нет определитель:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}, \tag{3}$$

составленный из системы коэфициентов этого преобразования. Первым случаем $[\Delta = 0]$ мы позже займемся особо; а пока что будем считать, что $\Delta \neq 0$. Тогда система (2) однозначно разрешима, а именно, в форме:

$$\left.\begin{aligned} x &= a_1'x' + b_1'y' + c_1'z', \\ y &= a_2'x' + b_2'y' + c_2'z', \\ z &= a_3'x' + b_3'y' + c_3'z', \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

причем $a_1', \ldots, c_3'$ оказываются разделенными на Δ минорами самого этого определителя Δ. Каждой точке x', y', z' соответствует, таким образом, одна и только одна точка x, y, z[1]), и переход от x', y', z' и x, y, z является опять-таки аффинным преобразованием.

2) Теперь можно поставить вопрос о том, как изменяются пространственные образы при этих аффинных преобразованиях. Если сперва возьмем плоскость:

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

то, вводя выражения (4) для x, y, z, получаем такое уравнение соответствующего образа:

$$A'x' + B'y' + C'z' + D' = 0,$$

где $A', \ldots, D'$ составляются известным образом из $A, \ldots, D$ и из коэфициентов преобразования. При этом, в силу 1),

[1]) [Это означает, что, в результате применения преобразования (2) ко всем точкам x, y, z „старого“ пространства, окажется заполненным (преобразованными точками x', y', z') все „новое“ пространство, причем все произойдет „без столкновений“: в каждую новую точку x', y', z' попадет только одна старая точка x, y, z.]

каждая точка второй плоскости получается из некоторой надлежаще выбранной точки первой плоскости; следовательно, каждой плоскости соответствует опять-таки некоторая плоскость. А поскольку всякая прямая является линией пересечения двух плоскостей, то, кроме того, каждой прямой должна обязательно соответствовать также некоторая прямая; преобразования, обладающие таким свойством, Мёбиус называет коллинеациями, ибо они сохраняют „коллинеарность" (Kollinearität „солинейность") трех точек, т. е. их свойство лежать на одной прямой. Таким образом всякое аффинное преобразование представляет обязательно некоторую коллинеацию.

Исследуя таким же образом поверхность второго порядка:

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2+\ldots=0,$$

а именно, заменяя x, y, z их выражениями (4) через x', y', z', получим тоже некоторое квадратное уравнение, т. е. аффинное преобразование переводит каждую поверхность второго порядка снова в подобную же поверхность и точно также каждую поверхность n-го порядка опять в некоторую поверхность того же n-го порядка.

Особенный интерес будут иметь для нас позже те поверхности, которые соответствуют некоторому шару. Прежде всего такими поверхностями могут быть, согласно предыдущему, только поверхности второго порядка, ибо шар является частным случаем поверхности этого вида; поскольку же все точки шара расположены в конечных пределах, так что ни одна из них не может после преобразования оказаться переброшенной в бесконечность, то наши поверхности обязательно должны быть поверхностями второго порядка, лежащими целиком в конечных границах, т. е. эллипсоидами.

3) Посмотрим теперь, что получается из свободного вектора с компонентами

$$X=x_1-x_2,\quad Y=y_1-y_2,\quad Z=z_1-z_2.$$

Применяя к координатам точек *1* и *2* формулы преобразования (2), получаем для компонент

$$X'=x_1'-x_2',\quad Y'=y_1'-y_2',\quad Z'=z_1'-z_2'$$

соответствующего отрезка $1'\,2'$ формулы:

$$\left.\begin{aligned} X' &= a_1X + b_1Y + c_1Z, \\ Y' &= a_2X + b_2Y + c_2Z, \\ Z' &= a_3X + b_3Y + c_3Z. \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

Эти новые компоненты зависят, таким образом, только от X, Y, Z, а не от отдельных значений координат x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2, т. е. совокупности всех отрезков 12 с одинаковыми компонентами X, Y, Z соответствует совокупность отрезков $1'2'$ тоже с одинаковыми компонентами

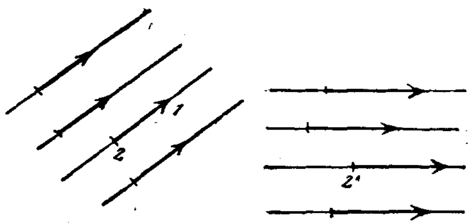

Рис. 50.

X', Y', Z', или, другими словами: каждому свободному вектору соответствует при аффинном преобразовании опять-таки некоторый свободный вектор. В этом утверждении содержится существенно больше, чем в том, что каждой прямой соответствует некоторая прямая. А именно, равные и равнонаправленные отрезки на двух параллельных прямых изображают один и тот же свободный вектор; поэтому и соответствующие им отрезки должны изображать один и тот же вектор, т. е. быть параллельными, равнонаправленными и равными между собой (рис. 50). Каждой системе параллельных прямых соответствуют, следовательно, опять-таки параллельные прямые, а равным отрезкам на них — также равные (между собой) отрезки. Эти свойства тем более значительны, что вообще, — как нетрудно убедиться, — абсолютная длина отрезка и абсолютная величина угла между двумя прямыми изменяются при аффинном преобразовании.

4) Рассмотрим теперь два вектора неодинаковой длины на одной и той же прямой. Они, как известно, получаются

один из другого умножением на некоторый скаляр; поскольку же X', Y', Z' являются, согласно формуле (5), однородными линейными функциями от X, Y, Z, то соответствующие им векторы тоже отличаются один от другого как раз только этим самым множителем, а это означает, что их длины относятся между собой, как длины первоначальных векторов.

Этот результат можно высказать еще и так: две прямые, связанные друг с другом некоторым аффинным соответствием, находятся в отношении „подобия" друг к другу, т. е. соответственные отрезки на обеих прямых имеют одно и то же отношение.

5) Наконец, сравним еще объемы двух соответственных тетраэдров $T = (1, 2, 3, 4)$ и $T' = (1', 2', 3', 4')$.

Имеем равенство:

$$6T' = \begin{vmatrix} x_1' & y_1' & z_1' & 1 \\ x_2' & y_2' & z_2' & 1 \\ x_3' & y_3' & z_3' & 1 \\ x_4' & y_4' & z_4' & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_1x_1 + b_1y_1 + c_1z_1, & a_2x_1 + b_2y_1 + c_2z_1, & a_3x_1 + b_3y_1 + c_3z_1, & 1 \\ a_1x_2 + b_1y_2 + c_1z_2, & a_2x_2 + b_2y_2 + c_2z_2, & a_3x_2 + b_3y_2 + c_3z_2, & 1 \\ a_1x_3 + b_1y_3 + c_1z_3, & a_2x_3 + b_2y_3 + c_2z_3, & a_3x_3 + b_3y_3 + c_3z_3, & 1 \\ a_1x_4 + b_1y_4 + c_1z_4, & a_2x_4 + b_2y_4 + c_2z_4, & a_3x_4 + b_3y_4 + c_3z_4, & 1 \end{vmatrix}$$

или, применяя известную теорему об умножении определителей, — равенство:

$$6T' = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 & 0 \\ a_3 & b_3 & c_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix},$$

в котором первый множитель есть Δ, а второй равен $6T$, так что:

$$T' = \Delta \cdot T.$$

Следовательно, при аффинных преобразованиях объемы всех тетраэдров, а потому и вообще объемы всех тел

(как суммы объемов тетраэдров или как пределы таких сумм) умножаются на некоторый постоянный множитель, а именно, на определитель преобразования Δ.

Этих немногих предложений, которые мы получили из аналитического определения аффинного преобразования, достаточно для того, чтобы составить себе вполне наглядное геометрическое представление об этом преобразовании.

При этом нам удалось получить упомянутые предложения проще, чем это обычно делается, благодаря тому, что мы могли воспользоваться понятием о векторе, которое в данном случае является самым подходящим вспомогательным средством.

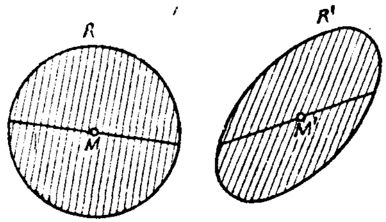

Рис. 51.

Наиболее отчетливую геометрическую картину аффинных преобразований можно получить, если за исходный пункт взять шар в пространстве R координат x, y, z; этому шару в пространстве R' координат x', y', z' будет соответствовать, как мы видели, некоторый эллипсоид. Если станем рассматривать какую-нибудь систему параллельных хорд шара, то им, согласно пункту 3), должны соответствовать также взаимно параллельные хорды эллипсоида (рис. 51). Далее, в силу подобия соответственных рядов точек (см. пункт 4), серединам хорд шара также соответствуют середины хорд эллипсоида, а так как первые лежат в одной (диаметральной) плоскости (шара), то вторые, в силу основного свойства 2), также должны лежать в одной плоскости, которую называют диаметральной плоскостью эллипсоида. Но, как известно, все диаметральные плоскости шара проходят через его центр M, который делит пополам каждую проходящую через него хорду (диаметр шара); поэтому соответствующая точка M' (центр эллипсоида) лежит на всех диаметральных плоскостях и делит пополам каждую проходящую через нее хорду (диаметр эллипсоида).

Далее, является важным установить, — что соответствует системе из трех взаимно перпендикулярных диамет-

ральных плоскостей шара. Последняя имеет, очевидно, то характеристическое свойство, что каждая из таких трех плоскостей делит пополам хорды, параллельные линии пересечения двух других плоскостей. Это свойство сохраняется при аффинных преобразованиях, а поэтому каждой из бесконечного множества троек взаимно перпендикулярных диаметральных плоскостей шара соответствует по такой тройке диаметральных плоскостей эллипсоида, что хорды, параллельные линии пересечения каких-либо двух из этих плоскостей, делятся третьей плоскостью пополам. Такие три плоскости называют тройкой сопряженных диаметральных плоскостей, а их три линии пересечения—тройкой сопряженных диаметров.

Но каждый эллипсоид имеет, — конечно, здесь я могу считать это известным, — три так называемые главные оси, т. е. тройку сопряженных диаметров, из которых каждый перпендикулярен к двум другим. Им соответствуют в R согласно предыдущему в силу нашего аффинного преобразования три взаимно перпендикулярных диаметра шара.

Для простоты принимаем, что центры эллипсоида и шара являются началами координат в R' и соответственно в R, а затем надлежащим вращением делаем обе ортогональные тройки осей осями x', y', z' в R' и соответственно осями x, y, z в R; при этом можно представлять себе по желанию, что вращается либо пространство, либо система координат. Во всяком случае, обе эти операции изображаются особым, подробно рассмотренным раньше типом линейных однородных подстановок координат, а поскольку последовательное применение нескольких линейных однородных подстановок всегда равносильно одному преобразованию того же типа, то и в новых координатах уравнения наших преобразований, переводящих R в R' также имеют формулу (2):

$$\begin{aligned} x' &= a_1x + b_1y + c_1z, \\ y' &= a_2x + b_2y + c_2z, \\ z' &= a_3x + b_3y + c_3z. \end{aligned}$$

Но при нашем выборе новых систем координат x-оси соответствует x'-ось, т. е. при $y = z = 0$ всегда будет также и $y' = z' = 0$, откуда следует, что $a_2 = a_3 = 0$; совершенно также находим, что $b_1 = b_3 = c_1 = c_2 = 0$.

Поэтому каждое аффинное преобразование, если не считать надлежащим образом выбранных вращений, представляет собой не что иное, как так называемое „чистое аффинное преобразование" (reine Affinität):

$$\begin{aligned} x' &= \lambda x, \\ y' &= \mu y, \quad (\text{причем } \Delta \gtrless 0) \\ z' &= \nu z, \end{aligned} \tag{6}$$

или, как говорят физики, чистую однородную деформацию (по-английски pure strain). Содержание этих уравнений поддается, очевидно, самой простой геометрической интерпретации. А именно: пространство растягивается (или соответственно сжимается, если $|\lambda| < 1$) в направлении x-оси в λ раз и, кроме того, еще зеркально отображается (около плоскости yz), если $\lambda < 0$; точно так же происходит μ-кратное и соответственно ν-кратное растяжение (сжатие) в двух других координатных направлениях; мы можем, поэтому, кратко охарактеризовать чистое аффинное преобразование как равномерное растяжение (сжатие) пространства по трем взаимно перпендикулярным направлениям и получаем, таким образом, геометрическую картину, нагляднее которой едва ли можно требовать.

При введении косоугольных координат все принимает еще более простой вид. А именно, в пространстве R выбираем, не изменяя положения начала, какую-либо произвольную прямо- или косоугольную систему осей x, y, z и принимаем три прямые в R', аффинно сопряженные с этими осями, за оси некоторой, вообще говоря, косоугольной системы координат x', y', z' в R'. А так как формулы перехода от прямоугольных к косоугольным параллельным координатам (при неподвижном начале) являются, как известно, линейными однородными уравнениями формы (2), и, с другой стороны, сочетание нескольких таких подстановок приводит снова к подстановкам того же типа, то уравнения аффинного преобразования и при употреблении установленных только что косоугольных координат должны иметь форму (2). Но согласно нашему выбору координатных осей эти уравнения должны переводить три оси системы R в оси системы R', из чего, повторяя буквально приведенные выше рассуждения, мы можем заключить, что эти уравнения действительно сводятся к полученной под конец форме (6).

Итак, при применении (косоугольных) параллельных координат, отнесенных к двум соответственным тройкам осей, уравнения аффинного преобразования сами собой получают эту простую специальную форму (6).

В связи с этими рассуждениями можно получить очень изящное решение задачи о нахождении механизма, позволяющего производить аффинные преобразования. Эту задачу я поставил в зимнем семестре 1908/09 г. во время чтения курса механики. Наилучшее решение как с точки

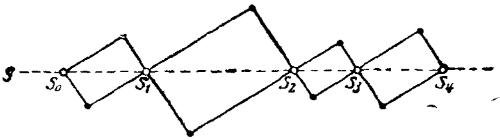

Рис. 52.

зрения основных идей, так и в смысле целесообразности технического устройства механизма, дал Ремак (R. Remak). Основным кинематическим элементом, использованным Ремаком, являются так называемые „нюрнбергские ножницы“; это — цепь шарнирно-связанных стержней, образующих ряд подобных друг другу параллелограмов. Вершины S_0, S_1, S_2,..., общие каждым двум таким соседним параллелограмам, описывают, при всех деформациях этой шарнирной системы, на общей прямой g этих точек, т. е. на общей диагонали всех параллелограмов, подобные ряды точек (рис. 52).

Если из трех таких ножниц составить треугольник, соединяя их шарнирно в каких-нибудь вершинах S, то система точек, образованная из всех шарнирных точек S, будет преобразовываться аффинно при всяком изменении всей шарнирной системы; к этому можно непосредственно прийти, принявши диагонали двух из этих ножниц за оси косоугольной системы координат (рис. 53).

Другие точки, которые одновременно подвергаются тому же аффинному преобразованию, получают, помещая между какими-либо двумя шарнирными точками треугольника еще одни ножницы того же рода и рассматривая их шарнирные точки (на рисунке эти ножницы обозначены их диагональными прямыми). Следуя этому принципу, можно построить самые разнообразные плоские, а также и пространственные модели аффинно-изменяемых систем [1]).

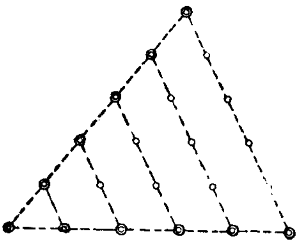

Рис. 53.

Я не буду здесь заниматься дальнейшим разбором всех свойств аффинных преобразований, а покажу лучше, где эти преобразования могут найти себе применение.

Начну с примера, который покажет каким они являются замечательным вспомогательным средством для вывода новых геометрических теорем; а именно, рассмотренное выше аффинное преобразование шара в эллипсоид дает возможность получить из известных свойств шара новые предложения об эллипсоиде. Например, при построении каких-нибудь трех взаимно перпендикулярных диаметров шара и проведении через их концы шести касательных плоскостей, получается описанный около этого шара куб с объемом $J = 8r^3$, где r — радиус шара.

Наше аффинное преобразование переводит, очевидно, каждую касательную плоскость шара в некоторую касательную плоскость эллипсоида. Поэтому при помощи упомянутых предложений находим, что каждому такому кубу, взятому в пространстве R, соответствует в пространстве R' некоторый описанный около эллипсоида параллелепипед, грани которого касаются эллипсоида в концах трех взаимно сопряженных диаметров и параллельны

[1]) Ряд подобных моделей выпущен фирмой Мартина Шиллинга в Лейпциге (Martin Schilling in Leipzig). Ср. F. Klein und Fr. Schilling, Modelle zur Darstellung affiner Transformationen in der Ebene und im Raume (Модели для изображения аффинных преобразований на плоскости и в пространстве) в журнале „Zeitschrift für Mathematik und Physik", Bd. 58, S. 311, 1910.

соответствующим диаметральным плоскостям и ребра которого соответственно параллельны этим трем диаметрам. (Аналогичное свойство имеем на плоскости для круга и эллипса, ср. рис. 54.) Это рассуждение можно, очевидно, сразу же обернуть: каждому параллелепипеду указанного рода, описанному около эллипсоида, соответствует неко-

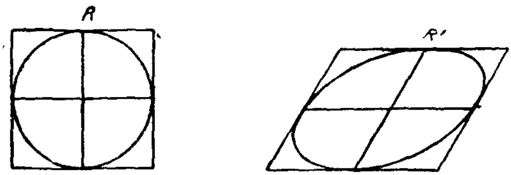

Рис. 54.

торый куб, описанный около шара, ибо трем взаимно сопряженным диаметрам эллипсоида соответствуют три взаимно перпендикулярных диаметра шара. Но нам известно, что при аффинном преобра овании каждый объем умножается на определителя Δ подстановки: поэтому для объема всякого параллелепипеда указанного типа, описанного около эллипсоида, имеет место формула:

$$J = J \cdot \Delta = 8r^3 \cdot \Delta.$$

Она не зависит, очевидно, от того, как расположен наш параллелепипед; этот параллелепипед имеет, таким образом, всегда один и тот же постоянный объем, независимо от того, к какой тройке сопряженных диаметров он отнесен. В частности для тройки главных осей, образующих друг с другом прямые углы, получаем прямоугольный параллелепипед, объем которого, очевидно, равен 8 abc, если $2a$, $2b$, $2c$ — длины главных осей. Этим мы определили указанный постоянный объем, после чего наша теорема гласит окончательно так: все параллелепипеды, описанные около (полученного из шара) эллипсоида, грани которых параллельны трем взаимно сопряженным диаметральным плоскостям, имеют один и тот же объем $J = 8abc$, где a, b, c — длины главных полуосей.

Для доказательства общеприложимсти этой теоремы ко всякому эллипсоиду остается еще уяснить себе, что всякий эллипсоид можно получить из шара путем некоторого аффинного преобразования. Но это сразу получается из формы (6) уравнений аффинного преобразования; а именно, из этих уравнений видно, что оси эллипсоида, полученного из шара, относятся как $\lambda : \mu : \nu$, причем λ, μ, ν — три произвольных числа.

Ограничиваясь этим маленьким примером применений аффинных преобразований в теоретической геометрии, я желаю с тем большей силой подчеркнуть, что аффинные преобразования имеют колоссальное значение также и на практике.

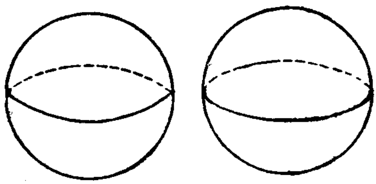

Рис. 55.

Обращаясь прежде всего к потребностям физиков, упомяну, что аффинные преобразования играют основную роль в теории упругости, в гидродинамике, вообще в каждой отрасли механики непрерывных сред. Конечно, мне вряд ли приходится объяснять это подробнее. Кто хоть немного занимался этими дисциплинами, тот достаточно хорошо знает, что там всякий раз, когда ограничиваются изучением достаточно малых элементов пространства, приходится иметь дело с однородными линейными деформациями.

Зато я остановлюсь здесь более подробно на вопросе о применении к правильному черчению, необходимому как для физиков, так и для математиков. Действительно, коль скоро речь идет о параллельном проектировании, то в основе всегда лежат только аффинные преобразования пространства. К сожалению, в этой области правильного черчения поразительно много грешат; как в математических книгах при изображении пространственных конфигураций, так и в книгах по физике при изображении аппаратов вы можете найти совершенно невероятные ошибки. Особенно часто бывает, — я привожу только один пример, — что при изображении шара экватор чертят в форме двуугольника из дуг круга (рис. 55, слева). Это, конечно, является полным извращением действительности; ибо на самом деле, как мы сейчас увидим, экватор всегда должно изображать в виде эллипса.

Принцип геометрически правильного черчения заключается в том, что фигуру, которую следует изобразить, проектируют на плоскость чертежа прямолинейными лучами, исходящими из одной точки. Наиболее простые соотношения получаются в том случае, когда представляют себе этот центр проектирования удаленным в бесконечность, т. е. когда изображение выполняют при помощи параллельной связки лучей; это и является тем случаем, который нас здесь интересует. Впрочем, эти разъяснения относятся к области начертательной геометрии. Я ни в коем случае не думаю систематически здесь ее излагать, а хочу только показать вам, какое место она занимает в общем здании всей геометрии. Поэтому я также не всегда буду иметь возможность входить в подробности доказательств.

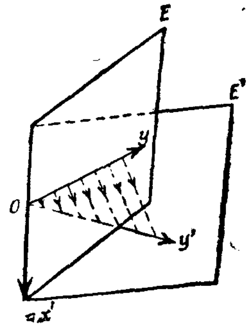

Рис. 56.

Начнем с исследования изображения плоской фигуры, т. е. с проекции одной какой-нибудь плоскости E на другую плоскость E' при помощи параллельной связки лучей. Для этого начало координат O помещаем на линии пересечения плоскостей E и E' (рис. 56) и направляем вдоль этой последней x-ось; y-ось проводим произвольно на плоскости E через O, например, перпендикулярно к x-оси, и определяем y'-ось как проекцию y-оси на плоскость E', получаемую при проектировании указанной выше связкой параллельных лучей, так что на плоскости E' получаем некоторую, вообще говоря, косоугольную систему координат. Тогда координаты двух соответственных точек на E и E' оказываются связанными такими соотношениями:

$$x' = x,$$
$$y' = \mu \cdot y,$$

где μ — некоторая константа, зависящая от заданного положения плоскостей и связки параллельных лучей; таким образом, мы действительно имеем здесь дело с аффинным преобразованием. Доказательство этих уравнений является настолько простым, что мне едва ли приходится на нем задерживаться. Отметим, что эти уравнения имеют по сравнению с общей формой (6) уравнений аффинного преобразования то упрощение, что $\lambda = 1$, так что $x' = x$. Причина этого, конечно, в том, что x-ось является линией пересечения оригинальной и картинной плоскостей, так что на ней каждая точка совпадает со своим изображением. Можно сразу получить все суще-

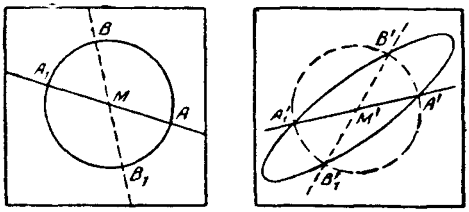

Рис. 57.

ственные свойства нашего отображения, специализируя для случая плоскости все теоремы, выведенные раньше для пространства; так, например, каждой окружности на E соответствует эллипс на E' и т. д.

Теперь представляется вполне естественным задать обратный вопрос: можно ли любые две плоскости E, E', связанные заданным аффинным соответствием, так расположить друг относительно друга, чтобы одна из них получалась из другой посредством некоторого параллельного проектирования. Для решения этого вопроса будем исходить из произвольной окружности на E и соответствующего ей эллипса на E' (вместо них мы могли бы также воспользоваться какими-нибудь двумя соответственными эллипсами). Центру M окружности соответствует центр M' эллипса (рис. 57).

Перенесем теперь эту окружность из плоскости E в плоскость E', совмещая ее центр с точкой M'; тогда она либо пересечет эллипс в четырех точках, либо не будет иметь с ним ни одной общей точки. Промежуточный же случай касания мы, ради простоты, оставляем здесь без рассмотрения.

В первом случае, показанном на рисунке, рассматриваем оба диаметра эллипса $A'A_1'$ и $B'B_1'$, которые проходят через упомянутые четыре точки пересечения, лежащие на плоскости E'; им соответствуют, в силу нашего аффинного преобразования, два диаметра AA_1 и BB_1 окружности на E, которым они еще сверх того равны по построению. Поэтому вообще соответственные отрезки на прямых AA_1 и $A'A_1'$, а также на прямых BB_1 и $B'B_1'$ оказываются равными, согласно общему свойству аффинных отображений (пункт 4, стр. 124).

Совмещая теперь плоскость E с E' так, чтобы точка M упала на M' и чтобы совпали прямые одной из названных пар, например, чтобы AA_1 совпала с $A'A_1'$ и выводя затем плоскость E за пределы E' в пространство вращением вокруг этой прямой, как вокруг оси, получаем некоторое аффинное преобразование обеих плоскостей, при котором каждая точка линии пересечения соответствует себе самой. Тогда легко можно показать, — я опять-таки не останавливаюсь на подробностях доказательства, — что все прямые, попарно соединяющие соответственные точки, параллельны между собой, каков бы ни был угол, образованный этими плоскостями, т. е., что аффинное преобразование плоскостей действительно может быть произведено параллельным проектированием.

Если же наш круг не пересекает эллипса, т. е. если его радиус меньше малой или больше большой полуоси эллипса, то оба общих диаметра становятся — на языке анализа — мнимыми, для чертежника же они вообще не существуют и все построение оказывается невозможным. Тогда, если все же желательно установить это соответствие при помощи некоторого параллельного проектирования, не остается ничего другого, как прибегнуть к преобразованию подобия и увеличивать или уменьшать наш круг до тех пор, пока не получится предыдущий случай; такие преобразования подобия и без того всегда употребляют при скицциpовании изображений (картин), как „перечерчивание картины в другом масштабе“. В результате получаем такую основную теорему: каждое аффинное соответствие можно установить, и притом бесчисленным числом различных способов, комбинируя некоторое преобразование подобия с некоторым параллельным проектированием.

Гораздо более интересной и важной, чем это отображение одной плоскости на другую, представляется проблема отображения всего пространства на плоскость посредством параллельного проектирования, проблема, к которой мы теперь переходим; при этом во избежание многословий условимся заранее всегда допускать увеличение или уменьшение изображения при помощи преобразования подобия. Таким образом возникает тот способ изображения, который в начертательной геометрии называют аксонометрией; на практике ему принадлежит чрезвычайно важная роль. Каждая фотография представляет собой почти что аксонометрическое отображение, если только изображенный предмет был достаточно удален от аппарата (строго говоря, фотография является центральной проекцией); точная же аксонометрия применяется прежде всего почти всегда в тех случаях, когда хотят изобразить пространственные геометрические фигуры, физические аппараты, архитектурные детали и тому подобное.

Весьма интересные примеры всевозможных таких аксонометрических изображений, которые можно непосредственно использовать и в преподавании, вы найдете в „Руководстве по учению о проектировании“ Мюллера и Пресслера[1]; там, например, можно видеть, как аксонометрически правильно изображают тангенс-гальванометр, барабанный якорь, самого различного рода кристаллы или, чтобы привести примеры из совершенно другой области, — из биологии, — клеточную ткань, улей и многое другое.

Разрешите мне теперь сразу же высказать то предложение, которое связывает эту аксонометрию с нашими предыдущими рассуждениями об аффинных преобразованиях: отображение пространства на плоскость посред-

[1] Leitfaden der Projektionslehre von C. H. Müller und O. Pressler („Сборник упражнений по стереометрическим построениям“), Лейпциг 1903.

ством параллельного проектирования и преобразования подобия (аксонометрия) аналитически изображается посредством аффинного преобразования с равным нулю определителем:

$$\begin{aligned} x' &= a_1 x + b_1 y + c_1 z \\ y' &= a_2 x + b_2 y + c_2 z, \\ z' &= a_3 x + b_3 y + c_3 z \end{aligned} \quad \text{причем } \Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0. \qquad (1)$$

Это как раз тот исключительный случай, рассмотрение которого мы в свое время отложили на будущее. Вы видите, насколько важны эти „вырождающиеся“ преобразования, хотя их, к сожалению, очень часто и совершенно несправедливо оставляют без внимания. Далее, оказывается справедливым также и следующее обратное предложение: каждая такая подстановка с определителем $\Delta = 0$ дает некоторое аксонометрическое отображение. При этом необходимо, чтобы не все коэфициенты этой подстановки и даже не все составленные из них миноры второго порядка были равны нулю, ибо, в противном случае, получились бы дальнейшие вырождения, которые я могу здесь пропустить, поскольку они легко могут быть исследованы по указанному ниже образцу.

Для доказательства нашего утверждения, убедимся прежде всего в том, что все точки x', y', z', получаемые из (1) (для произвольных x, y, z), действительно лежат в одной плоскости, т. е. в том, что существуют такие три числа k_1, k_2, k_3, для которых выполняется тождественно относительно x, y, z равенство:

$$k_1 x' + k_2 y' + k_3 z' = 0. \qquad (2)$$

В самом деле, это тождество эквивалентно в силу (1) такой системе трех линейных однородных уравнений:

$$\begin{aligned} k_1 a_1 + k_2 a_2 + k_3 a_3 &= 0, \\ k_1 b_1 + k_2 b_2 + k_3 b_3 &= 0, \\ k_1 c_1 + k_2 c_2 + k_3 c_3 &= 0, \end{aligned} \qquad (2')$$

а эти последние, как известно, определяют отношения: $k_1 : k_2 : k_3$ однозначным образом как раз в том случае, когда обращается в нуль определитель Δ из коэфициентов, но без обращения в нуль всех его девяти миноров.

Поэтому все точки изображения x', y', z' действительно лежат в одной плоскости (2), определяемой уравнениями (2').

Выберем теперь в пространстве R' такую новую прямоугольную систему координат, чтобы плоскость (2) превратилась в x'-y'-плоскость ($z'=0$). Тогда каждой точке пространства R должна соответствовать некоторая точка в плоскости $z'=0$, и уравнения нашего аффинного преобразования [1]) необходимо должны иметь в новых координатах такой вид:

$$\left.\begin{aligned} x' &= A_1x + B_1y + C_1z, \\ y' &= A_2x + B_2y + C_2z, \\ z' &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

При этом шесть постоянных $A_1, \ldots, C_2$ совершенно произвольны, ибо, ввиду особой формы последней строки, определитель нашей подстановки всегда равен нулю; не должны только одновременно обращаться в нуль все три минора (т. е. не должно быть $A_1 : B_1 : C_1 = A_2 : B_2 : C_2$), так как в противном случае имело бы место дальнейшее вырождение, которое мы исключили из рассмотрения с самого начала.

Доказательство того, что определенные таким образом аналитические отображения пространства R на x'-y'-плоскость E' действительно совпадают геометрически с определенными выше аксонометрическими проекциями, я разобью на несколько отдельных шагов, выводя одновременно главные свойства этого отображения (3), подобно тому, как я поступал ранее (стр. 121 и сл.), изучая аффинные преобразования с не равным нулю определителем.

1. Прежде всего ясно, что каждой точке x, y, z из R однозначно соответствует некоторая точка x', y' на E'. Наоборот, если задать какую-нибудь точку x', y' на E', то уравнения (3) будут выражать, что соответствующая точка x, y, z из R лежит на двух определенных плоскостях, коэфициенты которой, согласно нашему предполо-

[1]) [Выражая новые координаты (в R') через старые (там же) с сохранением начала и вставляя вместо старых координат выражения (1), найдем, что новые координаты связаны с координатами x, y, z тоже некоторым аффинным преобразованием без свободных членов.]

жению, не пропорциональны и которые поэтому имеют собственную (т. е. не бесконечно удаленную) линию пересечения; все точки этой прямой должны в нашем преобразовании соответствовать заданной точке x', y'. При изменении x', y', каждая из этих двух плоскостей перемещается параллельно самой себе, ибо коэфициенты A_1, B_1, C_1 и соответственно A_2, B_2, C_2 остаются неизменными. Следовательно, линия пересечения также остается параллельной самой себе, и мы приходим к тому результату, что каждой точке плоскости E' соответствуют все точки одной из прямых, составляющих совокупность параллельных прямых в R. Этим уже намечена связь нашего отображения с параллельным проектированием пространства.

2. Точно так же, как и в рубрике 3 (стр. 123), в случае общего аффинного преобразования, найдем теперь формулы для компонент x', y' отрезка на E', соответствующего свободному вектору X, Y, Z из R:

$$\left.\begin{aligned} X' &= A_1X + B_1Y + C_1Z, \\ Y' &= A_2X + B_2Y + C_2Z, \\ Z' &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

Это опять-таки означает, что каждому свободному вектору из R соответствует некоторый свободный вектор X', Y' на картинной плоскости или, точнее: если в пространстве R перемещать некоторый отрезок параллельно ему самому, сохраняя его величину и направление, то соответствующий ему отрезок на плоскости E' также будет перемещаться параллельно самому себе, сохраняя свою длину и направление.

3. В частности, рассмотрим единичный вектор $X=1$, $Y=Z=0$ на x-оси, идущий от точки 0, 0, 0 к точке 1, 0, 0. Ему, согласно (4), соответствует на E' вектор:

$$X' = A_1, \quad Y' = A_2,$$

идущий от начала O' к точке с координатами A_1, A_2. Подобно этому, единичным векторам на y- и z-осях соответствуют два вектора, идущие от O' к точкам с координатами B_1, B_2 и соответственно C_1, C_2. Эти три вектора на плоскости E', — обозначим их кратко через (A),

(B), (C) (рис. 58), — могут быть выбраны совершенно произвольно, ибо координатами своих концов они как раз и определяют упомянутые выше шесть произвольных параметров аффинного преобразования (3), так что этими векторами вполне определяется наше отображение; нужно только, чтобы все эти три вектора не попали на одну и ту же прямую, причем мы ради простоты предположим, что также никакие два из них не лежат на одной прямой. Три единичных вектора, лежащие на координатных осях пространства R, имеют своими изображениями на E', — таков наш результат — три произвольных вектора, исходящие из начала O', которые, со своей стороны, вполне определяют рассматриваемое аффинное преобразование.

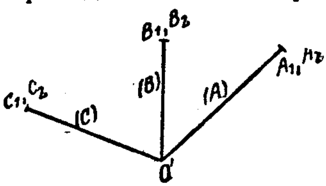

Рис. 58.

4. Чтобы установить отображение пространства на плоскость по данным векторам (A), (B), (C) также и геометрически, будем сперва исходить из какой-нибудь точки p $(x, y, z=0)$ x-y-плоскости; вектор, идущий от O

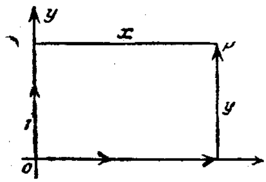

Рис. 59.

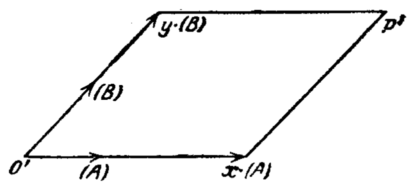

Рис. 60.

к p, можно получить, умножая единичный вектор x-оси на скалярное число x, единичный вектор y-оси — на число y и складывая полученные два вектора (рис. 59). Но это построение сразу же можно перенести на E', ибо соотношение между x-y-плоскостью и E' является, очевидно, обыкновенным двумерным аффинным соответствием (с не равным нулю определителем). Итак, мы получим изображение p' точки p, умножая скалярно вектор (A) на x, вектор (B) на y и складывая полученные произведения по правилу параллелограма (рис. 60). Таким образом мы можем построить отображение на плоскость E' каждой точки x-y-плоскости, а значит и отображение по точкам всякой фигуры на ней.

5. Перенося эти рассуждения на произвольную точку пространства R, нетрудно притти к такому результату (рис. 61): изображение p' точки p с координатами x, y, z получается посредством векторного сложения (по правилу параллелограма) векторов (A), (B), (C), предварительно помноженных, соответственно, на x, y, z. В силу коммутативности сложения, это построение может быть выполнено $1\cdot2\cdot3=6$ различными способами, так что точка p' получается как конец шести различных ломаных, состоящих из соответственно параллельных и равных отрезков. Образованная ими фигура (рис. 61) является, очевидно, отображением принадлежащего пространству R параллелепипеда, ограниченного тремя координатными плоскостями и тремя им параллельными плоскостями, проходящими через точку p. Мы уже с юности привыкли сразу же воспринимать подобные плоские фигуры, как изображение пространственных фигур, в особенности, когда такому представлению помогают путем утолщения спереди лежащих ребер. Эта привычка настолько сильна, что указанное изображение параллелепипеда кажется почти тривиальным, тогда как в действительности оно представляет собой чрезвычайно примечательную теорему.

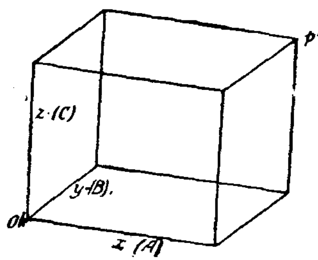

Рис. 61.

6. При помощи этого последнего построения можно дать на плоскости E' изображение всякой пространственной фигуры, т. е. всех ее точек. Я рассмотрю только один пример.

Имея шар с радиусом единица и с центром в начале O, рассмотрим прежде всего те окружности, по которым он пересекает координатные плоскости. Например, окружность пересечения шара с x-y-плоскостью имеет своими сопряженными, т. е. взаимно перпендикулярными, радиусами единичные векторы на x- и y-оси; поскольку же имеет место аффинное соотношение, то этой окружности соответствует некоторый эллипс (рис. 62), для которого точка O' служит центром, а векторы (A) и (B) сопряженными полудиаметрами, так что этот эллипс вписан в параллелограм, построенный на векторах $2\ (A)$ и $2\ (B)$. Точно так же и эллипсы, соответствующие двум другим окружностям пересечения, имеют своими центрами точку O', а векторы (B) и (C) и соответственно (A) и (C) сопряженными полудиаметрами.

7. Составив себе, таким образом, полную картину природы этих аффинных соответствий (3) с равным нулю определителем, мы должны еще сделать последний, решающий шаг в наших исследованиях, а именно: показать, что упомянутые аффинные соответствия действительно возникают при аксонометрическом проектировании так, как мы это утверждали выше. Здесь главную роль играет так называемое фундаментальное предложение аксонометрии Польке, которое К. Польке (K. Pohlke), профессор начертательной геометрии в строительной академии в Берлине, открыл в 1853 г. и опубликовал в 1860 г. в своем Учебнике начертательной геометрии [1]). В одной своей работе 1863 г. Шварц [2]) (H. A. Schwarz) впервые опубликовал элементарное доказательство этого предложения и одновременно подробно описал интересную историю его открытия, которую вам следовало бы там прочитать.

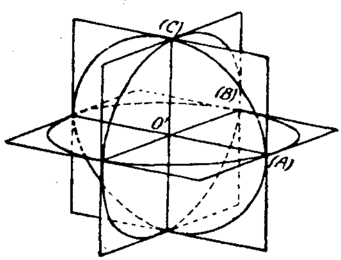

Рис. 62.

Сам Польке определяет аксонометрию не аналитически, а геометрически,— как изображение пространства параллельными лучами (связанное еще, в случае необходимости, с некоторым преобразованием подобия); его

[1]) „Lehrbuch der darstellenden Geometrie", в 2 частях, 4 изд., Берлин 1876. Рассматриваемое предложение находится в 1 т., стр. 109.

[2]) „Journal für die reine und angewandte Mathematik", Bd. 63, S. 309, Gessammelte mathematische Abhandlungen, Bd. 11, S. 1, Berlin 1890.

теорема утверждает тогда, что при таком изображении единичные векторы (исходящие из начала) на координатных осях пространства могут перейти в три произвольных вектора на плоскости E', проходящие через точку O'. В том, что наше отображение, определенное аналитически, действительно приводит к таким трем произвольным векторам, мы смогли легко убедиться в рубрике 3; для нас поэтому более глубокий смысл предложения Польке заключается в том, что наше отображение (3) (стр. 138), определенное аналитически, может быть получено геометрически путем параллельного проектирования и изменения масштаба, причем параллельные прямые, упомянутые в рубрике 1, оказываются проектирующими лучами.

8. Я хотел бы еще наметить здесь приблизительный ход прямого аналитического доказательства формулированного таким образом предложения. Направляя наше внимание на два семейства параллельных плоскостей пространства R:

$$A_1x + B_1y + C_1z = \xi,$$

$$A_2x + B_2y + C_2z = \eta$$

(где ξ, η — переменные параметры), замечаем, что каждая пара значений ξ, η определяет одну из названных параллельных прямых. Если бы нам удалось поместить в пространстве R картинную плоскость E', а на ней такую прямоугольную систему координат x', y' с подходящим масштабом, чтобы каждый луч ξ, η пронизывал эту картинную плоскость E' в точке $x' = \xi$, $y' = \eta$, тогда отображение (3), действительно, было бы геометрически осуществлено желательным образом.

Но для этого, прежде всего, плоскости $\xi = 0$, $\eta = 0$ должны пересекать упомянутую плоскость E' по координатным осям $O'y'$ и соответственно $O'x'$, т. е. по взаимно перпендикулярным прямым; обозначим через ϑ_1, ϑ_2 углы (определяющие положение плоскости E') между прямой $\xi = \eta = 0$ (рис. 63) и каждой из этих осей, а через α (известный нам) угол между плоскостями $\xi = 0$, $\eta = 0$; тогда по известной из сферической тригонометрии теореме косинусов, примененной к трехгранному углу, образованному плоскостями $\xi=0$, $\eta=0$ и E', косинус угла между прямыми $O'x'$, $O'y'$ оказывается равным $\cos\vartheta_1\cdot\cos\vartheta_2+\sin\vartheta_1\cdot\sin\vartheta_2\cdot\cos\alpha$; следовательно, этот угол будет прямым в том случае, если

$$\operatorname{ctg}\vartheta_1\cdot\operatorname{ctg}\vartheta_2=-\cos\alpha. \tag{a}$$

Но каждая плоскость $A_1x+B_1y+C_1z=\xi$ пересекает E' по прямой $x'=\text{const}$; если Q' — пересечение этой последней с x'-осью, то соответствующее значение x' оказывается равным $O'Q'$, с точностью до подлежащего еще определению масштабного множителя λ системы координат на E'; опуская перпендикуляры $Q'S$, $Q'R$ на плоскость ξ и соответственно на прямую $\xi=\eta=0$, получаем:

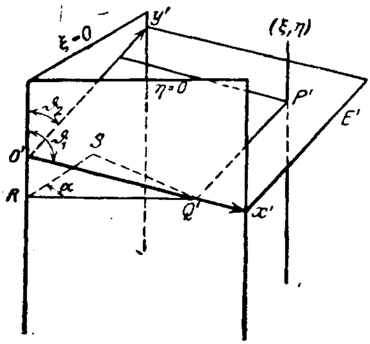

Рис. 63.

$$O'Q'=\frac{Q'R}{\sin\vartheta_1},$$

$$Q'R=\frac{Q'S}{\sin\alpha},$$

а поскольку $Q'S$, как кратчайшее расстояние между плоскостями $A_1x+B_1y+C_1z=0$ и $A_1x+B_1y+C_1z=\xi$, легко вычисляется по известной формуле аналитической геометрии в пространстве, то окончательно имеем:

$$x'=\lambda\cdot O'Q'=\lambda\cdot\frac{\xi}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\cdot\sin\vartheta_1\cdot\sin\alpha}.$$

Совершенно аналогично получаем выражение для координаты y' точек, лежащих на линии пересечения плоскости $A_2x+B_2y+C_2z=\eta$ с плоскостью E':

$$y'=\lambda\cdot\frac{\eta}{\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}\cdot\sin\vartheta\cdot\sin\alpha}.$$

Для того же, чтобы каждый луч, определяемый любой парой значений параметров ξ, η, пересекал, согласно нашему желанию, плоскость E' как раз в точке $x' = \xi$, $y' = \eta$, необходимо, чтобы:

$$\lambda = \sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sin \vartheta_1 \cdot \sin \alpha = \\ = \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2} \cdot \sin \vartheta_2 \cdot \sin \alpha, \qquad \text{(b)}$$

откуда для ϑ_1, ϑ_2 получается второе уравнение:

$$\sin \vartheta_1 \cdot \sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} = \sin \vartheta_2 \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}. \qquad \text{(c)}$$

Очень простое вычисление показывает, что уравнения (а), (с) дают для $\operatorname{ctg} \vartheta_1$, $\operatorname{ctg} \vartheta_2$, только одну пару действительных решений, определенных с точностью до знака $\pm$; другими словами, имеется только одно по существу (т. е. не считая симметричного с ним по отношению к плоскости, одновременно нормальной к плоскостям $\xi = 0$, $\eta = 0$) положение плоскости E', для которого реализуется аксонометрическое аффинное соответствие $x' = \xi$, $y' = \eta$, коль скоро масштаб для прямоугольной системы координат на E выбран сообразно равенствам (b). Весь этот ход идей можно еще больше геометризировать, если исходить из того условия, что точки-единицы на x- и y-осях (т. е. точки с $x' = 1$ и соответственно с $y' = 1$) должны попасть на прямые $\xi = 1$, $\eta = 0$ и $\xi = 0$, $\eta = 1$. Тогда наша задача принимает такую форму: найти плоскость E', которая пересекла бы заданную трехгранную призму по прямоугольному равнобедренному треугольнику.

После этого подробного изложения едва ли является необходимым долго останавливаться на также уже высказанном выше обратном утверждении: каждая аксонометрическая проекция представляет некоторое аффинное преобразование с исчезающим (нулевым) определителем. В справедливости этого предложения можно убедиться, применяя, как и выше (стр. 183), на проекционной плоскости E' сперва косоугольные координаты, получаемые из x- и y-осей пространства R путем параллельного проектирования, и переходя затем путем некоторой линейной подстановки к наперед заданной на E' прямоугольной системе координат.

Заканчивая этим настоящую главу об аффинных соответствиях, обращу ваше внимание еще на возможность получить экспериментальным путем наглядное представление о возникновении аксонометрического изображения, а именно, отбрасывая на экран, помощью проекционного фонаря (который следует представить себе расположенным ужасно далеко), теневые изображения некоторых простых моделей (квадрата, круга, эллипса, куба); при этом вы получите точное подтверждение наших результатов и фигур, а в частности сможете легко проверить на опыте также и теорему Польке, подвергая теневое изображение тех взаимно перпендикулярных штанг всевозможным изменениям, получаемым при передвижении как самой модели, так и проекционной плоскости (экрана).

Теперь мы переходим к новой главе, которая трактует о более общих, а именно о проективных преобразованиях, обнимающих аффинные преобразования, как частные случаи.

II. ПРОЕКТИВНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

Здесь я тоже сразу же рассматриваю трехмерное пространство и опять-таки за исходный пункт беру

1) аналитическое определение проективного преобразования. Но на этот раз мы полагаем x', y', z' равными не целым, а дробно-линейным функциям от x, y, z, которые, однако, все, — и это является чрезвычайно существенным, — должны иметь один и тот же знаменатель:

$$\begin{aligned} x' &= \frac{a_1x+b_1y+c_1z+d_1}{a_4x+b_4y+c_4z+d_4}, \\ y' &= \frac{a_2x+b_2y+c_2z+d_2}{a_4x+b_4y+c_4z+d_4}, \\ z' &= \frac{a_3x+b_3y+c_3z+d_3}{a_4x+b_4y+c_4z+d_4}. \end{aligned} \tag{1}$$

Каждой точке x, y, z соответствует в силу (1) вполне определенная конечная (т. е. не бесконечно удаленная) точка x', y', z', поскольку этот общий знаменатель отличен от нуля. Если же точка x, y, z, приближается к плоскости $a_4x+b_4y+c_4z+d_4=0$, то соответствующая точка x', y', z', — это и является новым по сравнению с аффинным преобразованием, — удаляется в бесконечность, как бы „убегает“; указанную плоскость называют

„плоскостью схода“ (Fluchtebene), а ее точки — „точками схода“ (Fluchtpunkte) и говорят, что при проективном преобразовании они соответствуют бесконечно удаленным элементам пространства, так называемой бесконечно удаленной плоскости и соответственно бесконечно удаленным точкам.

2) При разработке возникающих здесь проблем оказывается, как известно, очень целесообразным ввести однородные координаты, т. е. поставить вместо трех координат точки x, y, z, четыре величины ξ, η, ζ, τ, определяемые равенствами:

$$x = \frac{\xi}{\tau}, \quad y = \frac{\eta}{\tau}, \quad z = \frac{\zeta}{\tau};$$

эти четыре величины являются независящими друг от друга переменными с тем единственным ограничением, что они не должны все одновременно обращаться в нуль и что ни одна из них не должна становиться бесконечно большой. Поэтому каждой точке x, y, z принадлежит (соответствует) бесконечное множество систем значений $\rho\xi$, $\rho\eta$, $\rho\zeta$, $\rho\tau$, где ρ — произвольный множитель ($\neq 0$); обратно, каждая система значений ξ, η, ζ, τ, где $\tau \neq 0$, фиксирует определенную конечную точку x, y, z (ту же точку фиксируют и все системы значений $\rho\xi$, $\rho\eta$, $\rho\zeta$, $\rho\tau$). Только при $\tau = 0$ по крайней мере одно из частных x, y, z становится бесконечно большим; сообразно этому принимают, что каждая система значений ξ, η, ζ, $\tau = 0$ должна означать „бесконечно удаленную“ точку, причем все системы $\rho\xi$, $\rho\eta$, $\rho\zeta$, 0 дают одну и ту же точку. Этим вводятся строго аналитическим путем те точки, которые обыкновенно присоединяют к обычным конечным точкам в качестве „бесконечно удаленных“.

Опыт показывает, что оперирование с однородными координатами вызывает у многих, во всяком случае у начинающих, неприятное чувство. Я думаю, что виною этому та как бы неопределенность, текучесть этих величин, которую вносит произвольный множитель ρ. Быть может, отчетливое подчеркивание этого обстоятельства будет содействовать устранению такого ощущения.

Для этой же цели представляется целесообразным вставить здесь кое-какие соображения о некоторых геометрических представлениях, которые можно связать с однородными координатами. При этом сперва я буду говорить только об одной плоскости E. В этом случае для обеих прямоугольных координат полагаем:

$$x = \frac{\xi}{\tau}, \quad y = \frac{\eta}{\tau}.$$

Условимся рассматривать ξ, η, τ как прямоугольные координаты некоторого пространства, а нашу плоскость E будем рассматривать как плоскость $\tau = 1$ этого пространства, параллельную ξ-η-плоскости (рис. 64), полагая на ней $x = \xi$, $y = \eta$. Если соединить точку x, y на E прямолинейным лучом с точкой O, то, как известно, на этом луче отношения $\frac{\xi}{\tau}$ и $\frac{\eta}{\tau}$ будут сохранять постоянные значения а именно должно быть (все время):

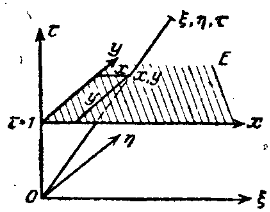

Рис. 64.

$$\frac{\xi}{\tau} = x, \quad \frac{\eta}{\tau} = y,$$

так как при $\tau = 1$ как раз должны иметь место равенства $\xi = x$ и $\eta = y$. Таким образом введение однородных координат означает просто отображение плоскости E в связке лучей, проектирующих эту плоскость из начала координат O вспомогательного трехмерного пространства: однородные координаты любой точки x, y плоскости E являются пространственными координатами точек того луча этой связки, который проектирует эту точку x, y; поскольку каждой точке на E соответствует бесконечное множество точек такого луча, то смысл неопределенности однородных координат делается совершенно ясным. Исключение системы значений $\xi = \eta = \tau = 0$ имеет свое геометрическое основание в том, что сама по себе точка O не фиксирует еще никакого определенного луча, а значит, и никакой точки на E. Столь же очевидным представляется и то обстоятельство, что нет нужды в бесконечных значениях для ξ, η, τ; ведь любой луч можно получить путем соединения точки O с точками, лежащими в конечных пределах. Наконец, становится совершенно ясным и то, как мы избегаем бесконечно больших значений для координат (x, y), заменяя бесконечно удаленные элементы E параллельными ей лучами через точку O, лежащими в плоскости $\tau=0$.

Употребление известного термина „бесконечно удаленные прямые" также получает при этом наглядное геометрическое содержание. Аналитически он является только выражением той абстрактной аналогии, что все „бесконечно удаленные точки" удовлетворяют линейному уравнению $\tau=0$ совершенно подобно тому, как все точки каждой конечной прямой тоже удовлетворяют некоторому линейному уравнению.

Теперь же мы можем выразиться чисто геометрически: каждой прямой на E принадлежит в связке O некоторый плоский пучок лучей, и наоборот: каждый плоский пучок лучей в связке O, — за исключением плоского пучка $\tau=0$, — определяет некоторую прямую на E; поэтому представляется целесообразным назвать прямой также и совокупность точек, принадлежащих этому последнему пучку на параллельной ему плоскости E, что и дает нам как раз „бесконечно удаленную прямую".

Совершенно аналогичные представления можно составить себе, вводя однородные координаты в трехмерном пространстве. А именно, мы представляем себе это последнее, как сектор (вырезок, Ausschnitt) $\tau=1$ в некотором вспомогательном четырехмерном пространстве ξ, η, ζ, τ и сопрягаем этот сектор со связкой лучей, которая проектирует его из нулевой точки (начала) вспомогательного пространства. Тогда все дальнейшие рассуждения можно провести без всяких затруднений в почти буквальной аналогии с предыдущим и, в частности, перенести сюда толкование бесконечно удаленных элементов. При этом применение четырехмерного пространства является, конечно, только средством для более удобного способа выражения, которому ни в коем случае не следует приписывать какое-либо мистическое значение.

3) Вводя в уравнения (1) проективного преобразования *для обоих пространств R, R' однородные* координаты, **можно разбить их, благодаря равенству их знаменателей,**

при помощи произвольного множителя пропорциональности ρ', на следующие четыре уравнения:

$$\left.\begin{aligned}\rho'\xi' &= a_1\xi + b_1\eta + c_1\zeta + d_1\tau,\\ \rho'\eta' &= a_2\xi + b_2\eta + c_2\zeta + d_2\tau,\\ \rho'\zeta' &= a_3\xi + b_3\eta + c_3\zeta + d_3\tau,\\ \rho'\tau' &= a_4\xi + b_4\eta + c_4\zeta + d_4\tau.\end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Эта система уравнений, если не считать произвольного множителя ρ', изображает наиболее общую линейную однородную подстановку четырех переменных и представляет собой поэтому некоторое аффинное соответствие тех двух вспомогательных четырехмерных пространств P_4, P_4', при помощи которых мы, по методу рубрики 2, истолковываем однородные координаты. И в этом случае можно составить себе более конкретное представление, если ограничиться плоскостью. Чтобы получить наиболее общее проективное преобразование плоскости, достаточно подвергнуть пространство связки лучей, проектирующих эту плоскость, произвольному аффинному преобразованию с фуксированным началом O и затем пересечь преобразованную связку тою же плоскостью. При этом мы каждый раз будем получать то же самое проективное соответствие, если будем, кроме того, соответственно множителю ρ', подвергать пространство еще произвольному преобразованию подобия с центром подобия в O, ибо проективное соответствие всецело определяется пересечениями лучей, проходящих через O, с нашей плоскостью, а каждый из этих лучей при названном преобразовании переходит в самого себя.

Примененный здесь метод использования вспомогательных пространств ρ, ρ' называют принципом проектирования и пересечения; он оказывается и во многих других случаях очень полезным, так как позволяет,—говоря вообще, — более сложные соотношения в пространствах n измерений представлять в более простой и понятной форме при помощи рассмотрения вспомогательных пространств $(n+1)$ измерений.

4) Переходим к задаче обращения уравнений преобразования (2). Теория определителей учит, что переменные ξ, η, ζ, τ тоже являются линейными однородными комби-

нациями переменных ξ', η', ζ', τ' опять-таки, конечно, с произвольным множителем пропорциональности ρ:

$$\left.\begin{aligned} \rho\xi &= a_1'\xi' + b_1'\eta' + c_1'\zeta' + d_1'\tau', \\ \rho\eta &= a_2'\xi' + b_2'\eta' + c_2'\zeta' + d_2'\tau', \\ \rho\zeta &= a_3'\xi' + b_3'\eta' + c_3'\zeta' + d_3'\tau', \\ \rho\tau &= a_4'\xi' + b_4'\eta' + c_4'\zeta' + d_4'\tau', \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

лишь бы только определитель:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix}$$

системы (2) не обращался в нуль. Следовательно, системы значений ξ, η, ζ, τ и ξ', η', ζ', τ' находятся при соблюдении этого условия во взаимно однозначном соответствии (с точностью до указанных произвольных общих множителей).

Замечу тут же, — и вы этому сразу же поверите, на основании нашего опыта в исследовании аффинных соответствий, — что и здесь случай $\Delta = 0$ действительно оказывается особенно интересным и не должен быть пропущен; ему соответствует отображение всего пространства на некоторую плоскость, что мы имеем во всякой центральной проекции, например, в фотографии. Но сперва мы рассмотрим общий случай, когда $\Delta \neq 0$.

5) Из (2) и (3) сразу же видно, что всякий раз как ξ, η, ζ, τ бывают связаны линейным уравнением, подобное же уравнение связывает также и ξ', η', ζ', τ', и наоборот. Каждой плоскости соответствует, следовательно, тоже некоторая плоскость, в частности, например, бесконечно удаленной плоскости пространства R' соответствует определенная, вообще говоря конечная, плоскость в пространстве R, — уже упомянутая выше „плоскость схода". Как видите, употребление термина „бесконечно удаленная плоскость" оказывается крайне целесообразным, так как только оно одно позволяет высказывать подобные предложения без всяких оговорок. Из сказанного непосредственно заключаем, что каждой прямой обязательно соответствует тоже некоторая прямая. Следо-

вательно, всякое проективное преобразование является, по терминологии Мёбиуса (стр. 123), некоторой коллинеацией.

б) Однако вся красота заключается в обратимости этого предложения: всякая коллинеация пространства, т. е. всякое взаимно однозначное преобразование, которое с каждой прямой сопрягает некоторую прямую и которое, кроме того, удовлетворяет еще определенным, почти самоочевидным условиям, является некоторым проективным преобразованием, т. е. преобразованием, определяемым аналитически уравнениями (1) или соответственно (2).

Принадлежащее Мёбиусу доказательство последнего предложения я проведу здесь ради удобства только для плоскости; для пространства оно выглядело бы совершенно аналогично. Ход идей этого доказательства сводится к следующему: в произвольно заданной коллинеации выбираем как-нибудь две четверки соответственных точек и сперва показываем, в рубрике а), что всегда существует такое проективное соответствие, которое переводит одну из таких произвольных четверок в другую. Но всякое проективное преобразование является в то же время некоторой коллинеацией, и мы доказываем далее в рубрике b), что при известных условиях может существовать только одна коллинеация, в которой являются соответственными (сопряженными) те же самые две четверки. Следовательно, установленное выше проективное преобразование действительно должно совпадать с заданной коллинеацией, а в этом и заключается наше утверждение. Перехожу к детальному проведению обеих частей доказательства.

а) Отметим, что уравнение проективного преобразования на плоскости:

$$\begin{aligned}\rho'\xi' &= a_1\xi + b_1\eta + d_1\tau,\\ \rho'\eta' &= a_2\xi + b_2\eta + d_2\tau,\\ \rho'\tau' &= a_3\xi + b_3\eta + d_3\tau\end{aligned}$$

содержат $9-1=8$ констант (изменение величины ρ' не влияет на это преобразование). Требование взаимного соответствия двух наперед заданных точек в некотором проективном преобразовании заключает в себе два линейных условия для констант этого преобразования, ибо здесь имеют значение только отношения трех однородных координат. Следовательно, соответствие двух четверок точек представляет $2 \cdot 4 = 8$ линейных условий, точнее говоря, восемь линейных однородных уравнений для девяти величин $a_1, \ldots, d_3$. Такие уравнения, как известно, всегда допускают решение, так что всегда можно найти константы проективного преобразования, переводящего одну из заданных четверок в другую. Ручаться за то, что это последнее действительно является собственным проективным преобразованием с не равным нулю определителем, и что оно определяется однозначно, можно, — как легко видеть, — только в том случае, если каждая из обеих заданных четверок точек находится „в общем положении", т. е. если никакие три точки ни в одной из четверок не лежат на одной прямой; но ведь только для этого случая нам и нужно здесь это предложение.

b) Пусть теперь задана произвольная коллинеация (коллинеарное сопряжение) плоскостей E, E'. Если *1*, *2*, *3*, *4* — какие-либо четыре точки на E, из которых никакие три не лежат на одной прямой, и если *1'*, *2'*, *3'*, *4'* — соответственные точки на E', удовлетворяющие такому же условию, то наше утверждение заключается в том, что заданная коллинеация вполне однозначно определяется соответствием обеих этих четверок точек· Доказательство будет состоять в установлении того что, исходя из этих двух взаимно соответственных четверок, можно построить коллинеацию одним и только одним способом, пользуясь только обеими ее характеристическими свойствами (однозначность и взаимное соответствие прямых). В качестве главного вспомогательного средства применим так называемые сети Мёбиуса, т. е. некоторые системы прямых, которыми мы как паутиной покроем наши плоскости.

Сперва проведем в каждой плоскости (рис. 65) по шести прямых, соединяющих попарно четыре заданные точки; в коллинеации они должны соответствовать одна другой, ибо, например, с прямой *1 2* на E должна быть сопряжена именно такая прямая на E', на которой лежало бы как изображение *1'* точки *1*, так и изображение *2'* точки *2*, а такой прямой может быть только *1' 2'*.

Но кроме основных четырех точек необходимо должны будут находиться во взаимном соответствии также и вновь получаемые пересечения соответственных прямых, например, точка (*1 4*, *2 3*) должна соответствовать точке (*1' 4'*, *2' 3'*): это также следует непосредственно из коллинеарности и взаимной однозначности отображения. Соединяя опять эти новые точки между собой прямыми, пересекая эти последние со старыми прямыми, соединяя снова полученные точки пересечения и продолжая все дальше этот процесс, получаем на каждой из плоскостей по все более густеющей сети прямых и точек, причем точки и прямые обеих сетей обязательно должны попарно соответствовать друг другу в искомой коллинеации.

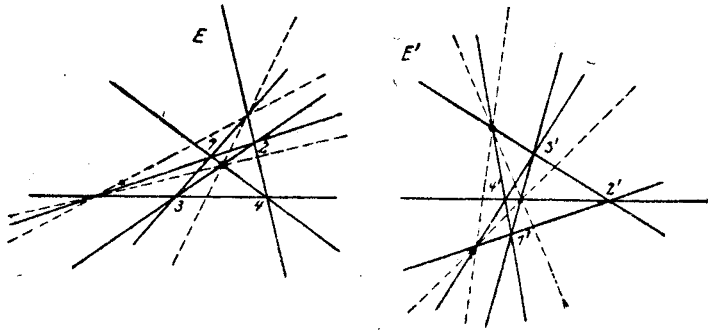

Рис. 65.

Всякая произвольно заданная точка плоскости E либо сама является одним из узлов сети, либо может быть, как легко себе уяснить, заключена в неограниченно сужающиеся петли этой сети, т. е. является предельной точкой для узловых точек сети. В первом случае соответственная точка на E' сразу же определяется однозначно как соответственный узел сети. А для определения соответственной точки во втором случае приходится внести в определение коллинеации одно добавление, которое представлялось Мёбиусу настолько самоочевидным, что он даже не считал нужным отдельно его формулировать. А именно, устанавливаемое коллинеацией отображение должно быть непрерывным; это означает, что с каждой предельной точкой какого-либо точечного множества на E должна быть сопряжена предельная точка соответственного точечного множества E'. Очевидно, что тогда и во втором случае, согласно предыдущему замечанию, соответственная точка на E' определяется однозначным образом. Этим доказывается справедливость нашего утверждения в) для всякой непрерывной коллинеации.

Таким же способом можно доказать, что каждая непрерывная коллинеация в 3-мерном пространстве определяется 5, и вообще, в n-мерном пространстве — $(n+2)$ парами соответственных точек.

Припоминая сказанное в начале этой рубрики 6, получаем в качестве результата следующую точную теорему: проективные преобразования являются единственными непрывными взаимно однозначными преобразованиями, при которых все без исключения прямые переходят снова в прямые.

После этого отступления будем продолжать начатое нами в рубрике 5 исследование поведения основных геометрических образов при проективном или, как мы теперь можем также сказать, при коллинеарном преобразовании. Мы видели там, что неограниченная плоскость или прямая переходят при проективном преобразовании в образы того же рода, так что эти понятия сохраняют при проективных преобразованиях определенное, неизменное значение. В этом своем свойстве общие проективные преобразования сходны с аффинными; но они отличаются от этих последних уже своим.

7) Поведением по отношению к понятию параллелизма. А именно, при проективных преобразованиях сохранение параллелизма двух прямых, имевшее место при аффинных преобразованиях (стр. 124), перестает быть обязательным. Наоборот, бесконечно удаленная плоскость одного пространства может перейти в любую конечную (т. е. не бесконечно удаленную) плоскость другого пространства, — в его плоскость схода; при этом бесконечно удаленной точке, общей двум параллельным прямым, соответствует, вообще говоря, некоторая лежащая на конечном расстоянии точка плоскости схода, в которой пересекаются прямые, соответствующие обеим параллельным прямым; за этим можно в точности проследить, например, при помощи однородных координат. В то же время мы, несомненно, убеждаемся также и в том, что понятие параллелизма не подвергается бессмы-

сленному уничтожению, но что оно уступает место такому более общему представлению: бесконечно удаленные точки пространства заполняют некоторую плоскость, которая может быть проективно переведена во всякую другую (конечную) плоскость пространства и которая, в силу этого, оказывается совершенно равноправной со всеми этими плоскостями; ее только в известной мере произвольно выделяет предикат „бесконечно удаленная". „Параллельными" называются тогда такие прямые (а также плоскости), пересечение которых лежит в этой выделенной плоскости; проективное преобразование может привести к тому, что они встретятся в определенной другой плоскости и тогда их уже не называют параллельными.

В связи с этим свойством находится и то обстоятельство, что по отношению к проективным преобразованиям грассмановы основные образы тоже теряют свой инвариантный характер. Свободный вектор не переходит более в свободный же вектор, скользящий вектор уже не переходит в скользящий, и т. д.

В самом деле, рассмотрим линейный элемент пространства R с шестью координатами:

$$X = x_1 - x_2, \qquad Y = y_1 - y_2, \qquad Z = z_1 - z_2,$$
$$L = y_1 z_2 - y_2 z_1, \quad M = x_2 z_1 - z_2 x_1, \quad N = x_1 y_2 - y_1 x_2,$$

и образуем аналогичные величины $X', \ldots, N'$ из координат точек x_1', y_1'; x_2', y_2', связанных с точками x_1, y_1; x_2, y_2 проективным преобразованием (1) (стр. 146):

$$x_1' = \frac{a_1 x_1 + b_1 y_1 + c_1 z_1 + d_1}{a_4 x_1 + b_4 y_1 + c_4 z_1 + d_4} \text{ и т. д.}$$

$$x_2' = \frac{a_1 x_2 + b_1 y_2 + c_1 z_2 + d_1}{a_4 x_2 + b_4 y_2 + c_4 z_2 + d_4} \text{ и т. д.}$$

В силу этих формул выражения для $X', \ldots, N'$ принимают форму дробей, числители которых могут быть представлены как линейные комбинации одних только шести величин $X, \ldots, N$ с постоянными коэфициентами, тогда как их общий знаменатель

$$(a_4 x_1 + b_4 y_1 + c_4 z_1 + d_4) \cdot (a_4 x_2 + b_4 y_2 + c_4 z_2 + d_4)$$

содержит самые координаты точек и не может быть выражен исключительно через $X, \ldots, N$. Таким образом координаты преобразованного линейного элемента зависят не только от координат первоначального элемента, но и от специального положения его начала и конца, поэтому при передвижении отрезка (1, 2) вдоль его прямой $X, \ldots, N$ будут сохранять свои значения, но $X', \ldots, N'$, вообще говоря, будут при этом изменяться, так что отрезок (1', 2') не является линейным элементом в грассмановом смысле.

В противоположность этому неограниченная прямая при проективном преобразовании сохраняется как таковая; это объясняется тем, что она изображается отношениями величин $X' : Y' : \ldots : N'$, из которых снова выпадает служивший помехой знаменатель, общий всем шести величинам; так что эти отношения действительно выражаются исключительно через отношения $X : Y : \ldots : N$.

8) Мне осталось назвать еще несколько важных образов, которые при проективном преобразовании переходят в образы того же рода. Прежде всего всякое квадратное уравнение относительно x', y', z' получается,—в чем можно убедиться, если умножить его на квадрат общего знаменателя $a_4x + b_4y + c_4z + d_4$,—из некоторого квадратного уравнения относительно x, y, z, и наоборот. Это значит, что каждой поверхности второго порядка в пространстве R соответствует такая же поверхность в пространстве R'. Поэтому и пересечение такой поверхности с плоскостью, т. е. любая кривая второго порядка, тоже переходит в некоторую кривую второго же порядка. Аналогично этому, вообще всякий алгебраический образ, определяемый одним или несколькими уравнениями относительно координат, преобразуется в однотипный с ним образ того же порядка; следовательно, тип (род) таких образов инвариантен по отношению к проективным преобразованиям.

9) Наряду с этими инвариантными образами, определяемыми посредством уравнений, я должен еще указать на одну числовую величину (zahlenmässige Grösse), отдельное значение (Wert) которой остается неизменным при всех проективных преобразованиях; она заменяет собой до некоторой степени понятие о расстоянии и об

угле, величина которых, как известно, не является инвариантною даже при аффинных преобразованиях, не говоря уже о проективных преобразованиях. Я имею в виду, если говорить сначала о прямой, известную функцию от (взаимных) расстояний четырех точек *1*, *2*, *3*, *4*, как-нибудь расположенных на прямой, а именно упомянутое уже выше двойное отношение (стр. 22):

$$\frac{\overline{12}}{\overline{14}} : \frac{\overline{32}}{\overline{34}} = \frac{\overline{12}\cdot\overline{34}}{\overline{14}\cdot\overline{32}}.$$

В самом деле, инвариантность этой величины по отношению к проективным преобразованиям легко может быть проверена вычислением, что мы, впрочем, еще раз сделаем в дальнейшем, исходя из других точек зрения.

Совершенно аналогично обстоит дело и с пучками лучей, если только брать вместо самих углов их синусы. А именно, обозначая через *1*, *2*, *3*, *4* лучи или плоскости некоторого пучка, получаем для их двойного отношения следующее выражение:

$$\frac{\sin(1, 2)}{\sin(1, 4)} : \frac{\sin(3, 2)}{\sin(3, 4)} = \frac{\sin(1, 2)\cdot\sin(3, 4)}{\sin(1, 4)\cdot\sin(3, 2)}.$$

Так как двойные отношения были первыми числовыми инвариантами проективных преобразований, с которыми случилось встретиться, то очень часто проективные геометры видели конечную цель стремлений в том, чтобы все дальнейшие инварианты проективных преобразований свести к двойным отношениям, хотя бы это и выходило часто очень искусственным. Нам еще придется в дальнейшем вернуться к более детальному изучению этих соотношений.

Этих немногих указаний достаточно, чтобы показать вам, как можно через весь геометрический материал провести резкую разграничительную линию в зависимости от его отношения к проективным преобразованиям. Все, что сохраняется при этих преобразованиях, составляет предмет возникшей в последнее столетие проективной геометрии, о которой уже говорил раньше и которую мы в дальнейшем должны будем еще изучить более глубоко. Это название, ставшее теперь общеупотребительным, лучше часто применявшегося раньше названия „геометрия положения", которым хотели подчеркнуть ее противопоставление „геометрии меры" или „элементарной геометрии", охватывающей все, также и проективно не инвариантные, геометрические свойства. Ибо старое название совершенно скрывает то, что многие метрические свойства, в частности значения двойного отношения, тоже принадлежат к этой дисциплине.

Теперь я хотел бы еще поговорить, так же как и раньше при аффинных соответствиях, о применениях проективных преобразований. Я начну с указаний, относящихся к:

1) начертательной геометрии; здесь я могу лишь, оставляя в стороне всякую систематику, привести несколько характерных примеров. Первым из них будет:

а) *отображение пространства на плоскость посредством центральной перспективы*, которая является прямым обобщением аксонометрии (параллельной перспективы); здесь проектирующие лучи исходят не из бесконечно удаленной точки, а из произвольной конечной точки.

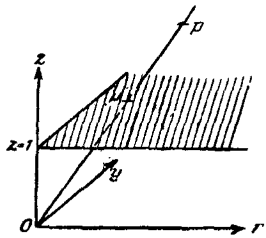

Рис. 66.

Центр проекции мы поместим как раз в начало координат O, а за картинную плоскость примем плоскость $z=1$ (рис. 66).

Тогда для изображения $p'(x', y', z')$ любой точки $p(x, y, z)$ будет во всяком случае:

$$z' = 1,$$

а поскольку p, p' лежат на одном и том же луче через O, то:

$$x' : y' : z' = x : y : z.$$

Поэтому уравнения нашего отображения имеют вид:

$$x' = \frac{x}{z},$$

$$y' = \frac{y}{z},$$

$$z' = \frac{z}{z}.$$

Это отображение является, следовательно, частным случаем проективного преобразования, и аналогия с соответствующими соотношениями при аксонометрии заставляет нас предположить, что оно имеет равный нулю определитель. В самом деле, переходя к однородным координатам, получаем преобразование

$$\left.\begin{aligned} \rho'\xi' &= \xi, \\ \rho'\eta' &= \eta, \\ \rho'\zeta' &= \zeta, \\ \rho'\tau' &= \tau, \end{aligned}\right\}$$

с определителем

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Отдельные свойства этого преобразования вы легко сможете вывести по аналогии с приведенными выше рассуждениями, если только будете иметь в виду, что каждая плоскость, вообще говоря, связана с картинной плоскостью некоторым проективным (двумерным) соответствием с не равным нулю определителем. Отсюда в частности следует, что, например, двойное отношение любых четырех точек на одной прямой или четырех лучей, проходящих через одну точку, остается при этом преобразовании неизменным.

b) Второй пример относится к некоторому проективному соответствию с не равным нулю определителем, которое включает в себя центральную перспективу как предельный случай и называется рельефной перспективой. Требуется изготовить такое рельефное изображение некоторого предмета, чтобы оно посылало глазу зрителя, помещенному в определенной точке, такие же лучи, какие оригинал посылал бы наблюдателю, помещенному в соответствующее место. При надлежащим образом ориентированной системе координат это опять-таки означает, что точка-оригинал и точка-изображение должны находиться на одном и том же луче, проходящем через начало координат:

$$x' : y' : z' = x : y : z. \tag{1}$$

Все различие по сравнению с предыдущим случаем заключается в том, что оригинал не отображается на плоскость, а лишь сжимается в некоторую узкую часть пространства конечной ширины.

Я утверждаю сразу же, что это преобразование дается формулами:

$$x' = \frac{(1+k)x}{z+k}, \quad y' = \frac{(1+k)y}{z+k}, \quad z' = \frac{(1+k)z}{z+k}, \tag{2}$$

которые прежде всего представляют собой во всяком случае некоторое проективное преобразование и удовлетворяют, очевидно, уравнениям (1). Определитель, составленный для соответствующих им однородных уравнений:

$$\begin{aligned} \rho'\xi' &= (1+k)\xi, \\ \rho'\eta' &= (1+k)\eta, \\ \rho'\zeta' &= (1+k)\zeta, \\ \rho'\tau' &= (1+k)\tau, \end{aligned}$$

гласит

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1+k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1+k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1+k & 0 \\ 0 & 0 & 1 & k \end{vmatrix} = k(1+k)^3$$

и, следовательно, будет отличен от нуля, если только не будет $k = 0$ или $k = -1$.

При $k = 0$ формулы (2) как раз и переходят в предыдущие формулы центральной перспективы, т. е. наш рельеф весь вырождается в плоскость; случай же $k = -1$ дает $x' = y' = z' = 0$, т. е. каждая точка пространства отображается в нулевую точку, — очевидно, совершенно никчемное тривиальное вырождение.

Для определенности примем $k > 0$. Чтобы уяснить себе геометрическое значение отображения (2), заметим сперва, что каждая плоскость $z = \text{const}$ переходит в параллельную к ней плоскость с аппликатой:

$$z' = \frac{(1+k)z}{z+k}. \tag{3}$$

Взаимное отображение этих двух плоскостей, осуществляемое проектирующими лучами из точки O, является вполне наглядным, так что остается только уяснить себе самый закон (3).

При $z=\infty$ (соответственно $\tau=0$) получается $z'=1+k$. Плоскость, проведенная параллельно x-y-плоскости на расстоянии $1+k$, является, таким образом, плоскостью схода пространства изображений и образует как бы задний план (фон) рельефа, на который отображается бесконечно удаленный задний план пространства объектов. Важную роль играет еще плоскость, равная единице, в которой совпадают предмет и его изображение; в самом деле, при $z=1$ получается также $z'=1$. Если теперь z изменяется, возрастая от 1 до ∞, то z' монотонно возрастает от 1 до $1+k$, т. е. если мы ограничимся предметами, помещенными позади плоскости $z=1$, то действительно получим в качестве изображения рельеф конечной глубины k. Такое ограничение всегда может и должно иметь место на практике (рис. 67).

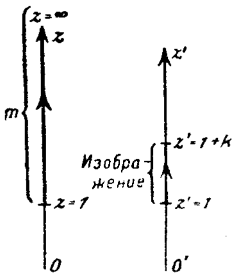

Рис. 67.

Составим двойное отношение для точек z, 1, z', 0:

$$\frac{z-1}{z-0}\cdot\frac{z'-0}{z'-1}=\frac{z-1}{z}\cdot\frac{(1+k)\,z}{k\,(z-1)}=\frac{1+k}{k}.$$

Это показывает, что вообще при сопряжении (3) два значения z, z' в том случае соответствуют друг другу, если они образуют с точками 1 и 0 двойное отношение определенной величины (не зависящей от z и z').

В нашей математической коллекции имеется модель, которая изображает в рельефной перспективе шар на кубе, круглый конус и круглый цилиндр; рассматриваемая с правильного расстояния она дает очень отчетливое впечатление тел, служащих оригиналом. Конечно, очень большую роль играют здесь психологические моменты. Ибо одно только то обстоятельство, что в глаз вступают такие же лучи, как от некоторого тела, не является еще достаточным для получения впечатления о наличии этого тела; во всяком случае чрезвычайно важной является здесь также и привычка. А именно, поскольку нам несравненно чаще приходилось видеть шар на кубе, чем приплюснутый эллипсоид на узеньком гексаэдре (таков вид рельефно-перспективного изображения), то мы уже заранее склонны объяснить световое впечатление первой из этих двух причин. Более подробное рассмотрение относящихся сюда моментов предоставим психологам.

Ограничусь сказанным для вашего первого ознакомления с применением проективных преобразований в начертательной геометрии. Конечно, все эти замечания настойчиво требуют дальнейшего углубления, и прежде, чем оставить эту область, я хотел бы порекомендовать вам заняться обстоятельным изучением начертательной геометрии, которая, как мне кажется, является необходимой для каждого преподавателя математики.

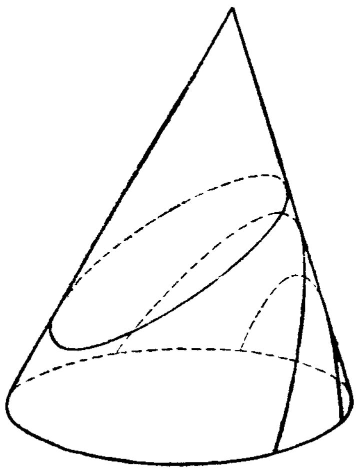
Рис. 68.

2) Второе применение проективных преобразований, на котором я хочу теперь остановиться, касается установления геометрических предложений и представлений. Для этой же цели мы уже использовали раньше (стр. 130 и сл.) аффинные преобразования.

a) Исходим из того, что окружность, будучи подвергнута проективным преобразованиям или соответственно центральным перспективам, переходит в любое „коническое сечение", т. е. в сечение произвольной плоскостью конуса, боковая поверхность которого образована проектирующими лучами, проходящими через точки окружности; здесь перед вами модель, которая показывает, как таким образом получаются эллипс, гипербола и парабола (рис. 68).

b) Для проективной геометрии существует, следовательно, только одно коническое сечение, ибо любые два таких сечения могут быть проективно переведены в круг, а значит, и друг в друга. Подразделение же на эллипсы, параболы и гиперболы не указывает с этой точки зрения на какое-либо абсолютное внутреннее различие, а касается только случайного положения относительно прямой, которую обычно выделяют из других прямых в качестве „бесконечно удаленной".

c) Установим теперь следующую основную теорему о двойном отношении в конических сечениях: любые четыре неподвижные точки *1, 2, 3, 4* конического сечения про-

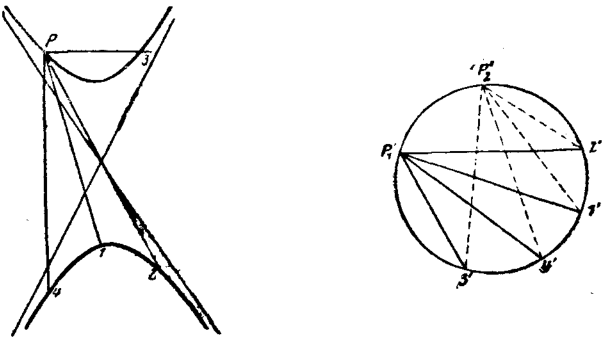

Рис. 69.

ектируются из пятой подвижной точки P того же конического сечения четырьмя лучами, которые имеют постоянное двойное отношение, независящее от того или другого положения точки P (на сечении).

Для доказательства вернемся к той окружности, из которой рассматриваемое коническое сечение возникает посредством центральной перспективы; поскольку при этом (т. е. при перспективном преобразовании) двойные отношения остаются неизменными, то наше предложение во всяком случае будет вообще справедливым, если только на этой окружности четыре точки $1'$, $2'$, $3'$, $4'$, соответствующие точкам конического сечения (рис. 69), проектируется из произвольных двух других точек P_1' P_2' той же окружности лучами с одинаковым двойным отношением. А это непосредственно вытекает из того, что, согласно теореме о вписанных углах, углы пучка

P_1' (1′, 2′, 3′, 4′) соответственно равны углам пучка P_2 (1′, 2′, 3′, 4′); следовательно, будут равны также одно другому и двойные отношения для обеих четверок лучей, составленные из синусов углов.

d) На основании этого предложения, Штейнер дал общее определение конических сечений, исходя из двух „проективно сопряженных“ пучков лучей, в которых каждые две соответственные четверки лучей имеют одинаковое двойное отношение. Коническое сечение представляет тогда геометрическое место точек пересечения соответственных лучей этих проективно-сопряженных между собою пучков. Надеюсь, что этих немногих указаний будет достаточно для того, чтобы сделать понятным для вас, какое огромное значение проективные преобразования имеют для теории конических сечений. Подробности вы можете найти в любой книге по проективной геометрии.

А теперь, следуя общему ходу мыслей этого второго раздела нашего курса, мы перейдем к новым классам геометрических преобразований, которые не принадлежат более к линейным преобразованиям, рассмотренным нами, начиная с движений и кончая наиболее общими проективными сопряжениями.

III. ВЫСШИЕ ТОЧЕЧНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

Мы займемся теперь исследованием таких преобразований, которые изображаются уже не линейными, а высшими рациональными, алгебраическими либо даже трансцендентными функциями:

$$x' = \varphi(x, y, z), \quad y' = \chi(x, y, z), \quad z' = \psi(x, y, z).$$

Следуя тенденции этого курса, я не стану излагать здесь общую систематику вопроса, а приведу лишь ряд отдельных примеров, которые имеют общее значение как для чистой математики, так и в особенности для применений.

В первую очередь я остановлюсь на самом употребительном из таких преобразований, — на преобразовании посредством обратных радиусов [1]).

[1]) [Этому преобразованию дают еще такие названия: „отображение посредством обратных радиусов-векторов“, „инверсия“, „обращение“.]

1. Преобразование посредством обратных радиусов

При этом преобразовании с каждой точкой p сопрягается, как известно, та точка p прямой Op, соединяющей p с началом координат O, для которой произведение $Op \cdot Op'$ равно некоторой заданной константе (рис. 70); этому соотношению преобразование обязано также и своим названием.

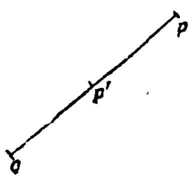

Рис. 70.

Вы знаете, что эти преобразования играют большую роль в чистой математике, прежде всего в теории функций комплексного переменного. Но не менее часто встречаются они также и в физике и других применениях, — об одном из этих применений нам еще придется говорить совсем особо.

При изучении нашего преобразования я снова начну 1) с вывода его уравнений в прямоугольных координатах. Поскольку p и p' лежат на одной прямой, проходящей через O, то должно быть:

$$x' : y' : z' = x : y : z, \tag{1}$$

а соотношение между расстояниями Op, Op', если для простоты принять упомянутую константу равной единице, даст:

$$(x^2 + y^2 + z^2)(x'^2 + y'^2 + z'^2) = 1. \tag{2}$$

Отсюда выводим такие уравнения преобразования:

$$x' = \frac{x}{x^2 + y^2 + z^2}, \quad y' = \frac{y}{x^2 + y^2 + z^2}, \quad z' = \frac{z}{x^2 + y^2 + z^2}; \tag{3}$$

точно так же получается, что и обратно:

$$x = \frac{x'}{x'^2 + y'^2 + z'^2}, \quad y = \frac{y'}{x'^2 + y'^2 + z'^2}, \quad z = \frac{z'}{x'^2 + y'^2 + z'^2}. \tag{4}$$

Итак, как координаты точки p, так и координаты точки p_1' выражаются через координаты другой точки (т. е. p' или соответственно p) в виде некоторых, в обоих случаях одних и тех же, рациональных функций. Знаменателем служит квадратичное выражение; мы здесь имеем дело с частным случаем так называемого квадратичного бирационального преобразования. Существует обширный класс таких бирациональных (вообще говоря, взаимно однозначных) преобразований, которые в обоих направлениях изображаются посредством рациональных функций, под названием Кремоновых[1]) преобразований они сделались предметом теории, достигшей широкого развития. Я считал желательным хотя бы упомянуть о них здесь в связи с изучением их простейшего представителя.

2) Уравнения (3), (4) показывают, что за исключением, пока что, начала координат, с каждой точкой p пространства сопрягается некоторая точка p' и, наоборот, с каждой точкой p' — некоторая точка p. Если же приближать x, y, z одновременно к нулю, то знаменатель выражений (3) оказывается бесконечно малой высшего порядка, чем числители, и поэтому координаты $x' y' z'$ становятся бесконечно-большими; мы могли бы поэтому назвать начало координат точкой схода нашего преобразования.

Если же, наоборот, x', y', z', по тому или другому закону возрастают бесконечно, то, в силу (4), x, y, z каждый раз обращаются в нуль; следовательно, если бы мы захотели придерживаться введенной нами выше терминологии, то должны были бы сказать, что всей бесконечно удаленной плоскости соответствует только одна точка. Но ведь эта „бесконечно удаленная плоскость" была только удобным способом выражения, приспособленным к проективным преобразованиям; он указал, что при этих преобразованиях бесконечно удаленная область пространства (das Unendlichweite den Raumes) ведет себя как плоскость, т. е. может быть преобразована в точки той или другой конечной плоскости; этот же способ выражения давал возможность высказывать теоремы без всяких исключений и без различения отдельных случаев. Но ничто нам не мешает ввести здесь другой, отличный от предыдущего способ выражения, чтобы с его помощью и теперь, как и раньше, притти к теоремам, справедливым без всякого исключения. Бесконечно удаленная область переводится нашим преобразованием в одну точку; поэтому

[1]) [Кремона (Luigi Cremona, 1830 — 1903) — выдающийся итальянский геометр.]

мы будем просто говорить, что существует только одна бесконечно удаленная точка, которая при нашем преобразовании как раз соответствует началу координат. Тогда наше преобразование действительно оказывается взаимно однозначным без всякого исключения.

Сколько бы мы не подчеркивали, что здесь, как и раньше, ни в малейшей степени не имеются в виду метафизические представления о действительной природе бесконечно далекого, этого оказывается недостаточно. Всегда снова и снова находятся люди, которые односторонне привыкнув к какому-нибудь одному из этих двух способов выражения, стремятся придать ему какой-то трансцендентальный смысл; такие представители двух разных точек зрения часто вступают друг с другом в спор. В действительности же и те и другие не правы: они забывают, что речь идет о произвольных соглашениях, приспособленных в каждом отдельном случае только к той или иной определенной цели.

3) Важнейшее свойство нашего преобразования состоит в том, что при нем, вообще говоря, шары переходят снова в шары. Действительно, уравнение всякого шара имеет вид:

$$A(x'^2+y'^2+z'^2)+Bx'+Cy'+Dz'+E=0; \qquad (5)$$

подставляя сюда вместо x', y', z' их выражения из уравнений (3), а вместо x'^2, y'^2, z'^2 — его выражение из соотношения (2) (стр. 166), получим после умножения на $x^2+y^2+z^2$:

$$A+Bx+Cy+Dz+E(x^2+y^2+z^2)=0,$$

т. е. действительно снова уравнение шара. При этом, конечно, следует заметить, что уравнением (5) охватываются при $A=0$ также и плоскости; здесь целесообразно будет рассматривать их, как частный случай шаров, а именно, как такие шары, которые содержат бесконечно удаленную точку. При нашем преобразовании они переходят в шары, проходящие через нулевую точку, которая как раз и соответствует бесконечно удаленной точке; точно так же и обратно подобные шары переходят в шары, содержащие бесконечно удаленную точку, т. е. в плоскости. Таким образом при этих соглашениях действительно оказывается справедливой без всякого исключения теорема, что шарам всегда соответствуют шары.

Всякие два шара (а также и шар с плоскостью) пересекаются по кругу; поэтому каждому кругу соответствует тоже круг[1]); при этом прямые линии следует рассматривать тоже как „круги через бесконечно удаленную точку", которым, в силу нашего преобразования, соответствуют круги через нулевую точку.

5) Это последнее предложение остается, конечно, в силе, если выполнять преобразование при помощи обратных радиусов только в пределах одной плоскости; в этом случае оно приводит к изящному решению проблемы направляющего механизма или „прямила", которая является чрезвычайно элементарной и принадлежит, собственно, к кругу интересов даже и не-математиков. Задача заключается в том, чтобы при помощи шарнирно-соединенных неизменяемых штанг заставить некоторую связанную с ними точку описывать прямую линию; в прежнее время при построении паровых машин придавали особое значение такого рода механизмам, которые должны осуществлять связь между поршнем, совершающим прямолинейные движения вперед и назад, и концом кривошипа, движущимся по кругу.

Здесь нас интересует инверсор, сконструированный в 1864 г. французским офицером Поселье (Peaucellier) и вызвавший тогда большой шум, хотя его конструкция очень проста и естественна.

Этот аппарат состоит, прежде всего, из соединенных шарнирами шести штанг (рис. 71), из которых две имеют длину l и соединяются в неподвижной точке O, остальные же четыре, имеющие длину m, образуют ромб, две противоположные вершины которого соединяются с концами штанг l; две другие свободные вершины ромба обозначим через p и p'. Аппарат имеет две степени свободы: во-первых, обе штанги l можно произвольно приближать одну к другой или раздвигать, а во-вторых, обе их можно произвольно вращать, как целое, вокруг O.

[1]) [Любой круг рассматриваем, как пересечение двух шаров; эти шары переходят в шары или плоскости, пересекающиеся по кругу или по прямой, что и соответствует взятому кругу].

При каждом таком движении три точки O, p, p', как видно из очень простых геометрических соображений, всегда остаются на одной прямой, причем произведение:

$$Op \cdot Op' = l^2 - m^2 = \text{const},$$

т. е. сохраняет постоянное значение, независимое от положения точки p, следовательно, этот аппарат действительно выполняет преобразование посредством обратных радиусов с центром в O. Поэтому, достаточно вести p по кругу, проходящему через точку O, чтобы, согласно предложениям рубрики 4, действительно заставить точку p' двигаться по некоторой прямой. А для получения движения точки p по кругу присоединяем в ней еще седьмой стержень pC, второй конец C которого закреплен как раз посредине между O и начальным положением точки p; тогда остается только одна степень свободы, и p' действительно передвигается по прямой. Впрочем, следует заметить, что точка p' не может описывать всю неограниченную прямую; свобода ее движения ограничена тем, что расстояние ее от O всегда меньше $l+m$. Однако в некоторых моделях точка C также может немного передвигаться; тогда круг, описываемый точкой p, проходит очень близко от точки O; поэтому p' описывает не прямую, а некоторый круг очень большого радиуса; также и это применение аппарата может при случае быть полезным [1]).

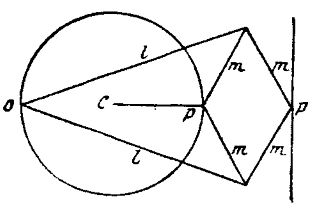

Рис. 71.

6) Из общих свойств преобразования при помощи обратных радиусов я должен еще отметить свойство сохранения углов, которое заключается в том, что угол, образуемый любыми двумя поверхностями в любой точке

[1]) Ср. также A. B. Kempe, How to draw a straight line (Как провести прямую линию), London 1877 и G. Hessenberg, Gelenkmechanismen zur Kreisverwandschaft. (Шарнирные механизмы для кругового соответствия), H. 6 der Naturwissenschaftlich-medizinischen Abhandlungen der Württembergischen Gesellschaft zur Förderung der Wissenschaften, Abteilung Tübingen 1924.

линии их пересечения, остается одним и тем же до и после преобразования. Я не буду останавливаться на доказательстве, ибо здесь для нашего обзора нет необходимости вдаваться в подробности.

Как частный случай преобразования при помощи обратных радиусов можно рассматривать стереографическую проекцию, которая имеет громадное значение как раз в применениях. Мы получим ее следующим образом:

7) Рассмотрим такой шар, который переводится нашим преобразованием (3) в неподвижную плоскость $z' = 1$. По третьей из формул (3) уравнением этого шара будет:

$$1 = \frac{z}{x^2 + y^2 + z^2};$$

его можно переписать так:

$$x^2 + y^2 + \left(z - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}.$$

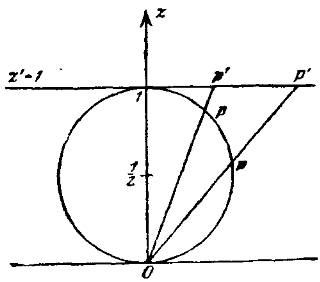

Рис. 72.

Искомым оригиналом для плоскости $z' = 1$ является, следовательно, шар с радиусом, равным $\frac{1}{2}$, и центром в точке $z = \frac{1}{2}$ оси z, который проходит через нулевую точку и касается картинной плоскости $z' = 1$ (рис. 72). Подробности соотношения между плоскостью и шаром можно сделать вполне наглядными, если воспользоваться для отыскания соответственных точек связкою лучей, исходящих из нулевой точки; я приведу здесь без доказательства только следующие теоремы:

1) Отображение взаимно однозначно без каких-либо исключений, если рассматривать бесконечность на плоскости как одну точку, отображаемую в точке O шара.

2) Кругам на шаре соответствуют круги на плоскости, в частности кругам на шаре, проходящим через O, соответствуют на плоскости круги, проходящие через бесконечно удаленную точку, т. е. прямые линии.

3) Соответствие между обеими поверхностями сохраняет углы; оно, как говорят, конформно.

Что эта стереографическая проекция имеет в теории функций крупнейшее значение, это всем вам должно быть известно; я напомню, что в предыдущем курсе[1]) мы уже очень часто применяли ее с большой пользой. Из прикладных наук, в которых она играет не менее важную роль, следует здесь особенно отметить географию и астрономию; она была известна уже античным астрономам, и еще теперь вы найдете в каждом атласе изображения полушарий и полярных стран земли в стереографической проекции. Из этой же прикладной области я заимствую еще несколько примеров.

2. Некоторые общие картографические проекции

Экскурс в этом направлении представляется мне как раз в настоящем курсе особенно уместным. Ведь теория графических карт является весьма важной областью в рамках школьного преподавания; не подлежит сомнению, что каждому учащемуся будет интересно услышать, по какому именно принципу вычерчены карты в его атласе, и преподаватель математики наверное достигнет большей активности со стороны учащихся на своих занятиях, если он даст при случае желательные пояснения по этому вопросу, чем если бы он занимался исключительно абстрактными вопросами. Поэтому каждый кандидат на учительское звание должен был бы быть знаком с этой областью, которая к тому же доставляет и математику интересные примеры точечных преобразований.

Наиболее целесообразным будет с самого начала представлять себе земной шар стереографически отображенным из одного из полюсов на x-y-плоскость; тогда всякое другое отображение точек шара на некоторую ξ-η-плоскость изобразится двумя уравнениями вида:

$$\xi=\varphi(x,y),\quad \eta=\chi(x,y).$$

Первым видом отображений, часто применяемым на практике, являются изогональные (т. е. сохраняющие углы) или конформные отображения; они получаются, как учит теория функций, если рассматривать комплексную

[1]) Том I, стр. 160 (173).

переменную $\xi + i\eta$ как аналитическую функцию комплексной переменной $x + iy$:

$$\xi + i\eta = f(x + iy) = \varphi(x, y) + i\chi(x, y).$$

Однако я считаю здесь необходимым отчетливо отметить, что как раз в географической практике очень часто употребляются также и отображения, не сохраняющие углов, так что ни в ко м случае не следует, — как это нередко бывает, — рассматривать изогональные изображения как единственно важные.

Среди конформных отображений первое место занимает так называемая меркаторская проекция, которую открыл около 1550 г. математик Гергард Меркатор (Gerhard Merkator), носивший, собственно говоря, чисто немецкое имя Кремер (Kremer)[1]). Меркаторские карты земли вы найдете в любом атласе.

Меркаторская проекция определяется тем, что нашей аналитической функцией f является в данном случае логарифм. Поэтому она изображается уравнением:

$$\xi + i\eta = \log(x + iy).$$

Мы, математики, можем сразу вывести свойства рассматриваемой проекции из этой краткой формулы, тогда как для географов, не имеющих достаточного математического образования, изучение меркаторской проекции представляет, конечно, значительные трудности. Вводя на x-y-плоскости полярные координаты (рис. 73), т. е. полагая $x + iy = r \cdot e^{i\varphi}$, получим:

$$\xi + i\eta = \log(r \cdot e^{i\varphi}) = \log r + i\varphi,$$

так что

$$\xi = \log r, \quad \eta = \varphi.$$

Предполагаем, что южный полюс земли является центром примененной стереографической проекции; тогда нулевая точка O на x-y-плоскости соответствует северному полюсу, а лучи $\varphi = \text{const}$, проходящие через O, соответствуют земным меридианам. Поэтому в меркатор-

[1]) [Merkator (латинское слово), Kremer (Krämer) (немецкое слово) — купец, торговец.]

ской проекции (рис. 74) эти последние превращаются в прямые $\eta = \text{const}$, параллельные ξ-оси; северный полюс ($\xi = -\infty$) лежит на них слева, а южный ($\xi = +\infty$) — справа в бесконечности. Поскольку угол φ определен только с точностью до кратного 2π, то отображение бесконечно-многозначно, и каждая параллельная (горизонтальная) полоса шириною в 2π является уже отображением всей земной поверхности. Параллели (на земном шаре), которым в стереографической проекции соответствуют круги

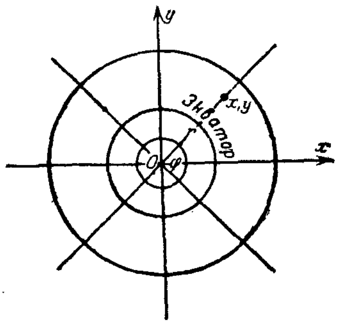

Рис. 73.

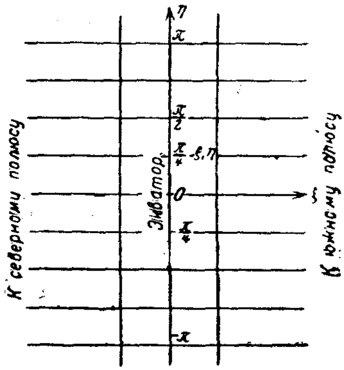

Рис. 74.

$r = \text{const}$, превращаются в меркаторской проекции в параллельные (вертикальные) прямые $\xi = \text{const}$, т. е. в нормальные траектории к прямым, изображающим меридианы, чего и следовало ожидать, имея в виду изогональность изображения. В частности, экватору ($r = 1$) соответствует η-ось ($\xi = 0$).

Ограничусь одним этим примером, чтобы побудить вас к дальнейшему изучению многочисленных преобразований теории географических карт; зато я рассмотрю здесь еще одно предложение этой теории общего характера. Кто из вас занимался географией, тот наверно слыхал о теоремах Тиссо, которые Тиссо (Tissot) развил в своем трактате [1]), переведенном Гаммером (Hammer)

[1]) „Die Netzentwürfe geographischer Karten nebst Aufgaben über Abbildung beliebiger Flächen aufeinander“, Stuttgart 1887.

в Штуттгарте. Мы можем очень просто уяснить себе содержание этих теорем, исходя из нашей точки зрения.

Пусть имеем две географические карты, т. е. два отображения земного шара на x-y-плоскость и на ξ-η-плоскость. Эти отображения могут быть какими угодно, в частности — не обязаны быть конформными. Но во всяком случае оба они взаимно связаны некоторым соотношением вида:

$$\xi = \varphi(x, y), \quad \eta = \chi(x, y).$$

Исследуем только окрестность двух соответственных точек x_0, y_0 и ξ_0, η_0, т. е. таких, что

$$\xi_0 = \varphi(x_0, y_0), \quad \eta_0 = \chi(x_0, y_0).$$

Введем новые переменные x', y', ξ', η', определяя их равенствами:

$$x = x_0 + x', \quad y = y_0 + y';$$

$$\xi = \xi_0 + \xi', \quad \eta = \eta_0 + \eta'.$$

Применяя разложение φ, χ по формуле Тейлора, мы получаем:

$$\xi' = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)_0 \cdot x' + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)_0 \cdot y' + \ldots,$$

$$\eta' = \left(\frac{\partial\chi}{\partial x}\right)_0 \cdot x' + \left(\frac{\partial\chi}{\partial y}\right)_0 \cdot y' + \ldots;$$

Здесь производные следует брать для точки $x = x_0$, $y = y_0$, а многоточиями обозначены члены высшего порядка относительно x', y'. Ограничимся настолько малою окрестностью точки x_0, y_0, чтобы выписанные линейные члены давали уже достаточное приближение для действительных значений ξ', η'; при этом мы, конечно, исключаем такие особые точки x_0, y_0, в которых не существует подобной окрестности, следовательно, такие, например, точки, в которых все четыре первые производные одновременно

[А. Тиссо — известный французский геометр (1824—1897). Французский оригинал его трактата появился в 1881 г. под названием „Sur la representation des surfaces et les projections des cartes. geographiques". Существует русский перевод Д. П. Рашкова: Тиссо, Изображение одной поверхности на другой и составление географических карт, Москва 1899].

обращаются в нуль, так что линейные члены совсем не дают никакого пригодного приближения. Присматриваясь к получаемым таким образом линейным уравнениям между x', y', ξ', η', приходим непосредственно к такому фундаментальному предложению, которое лежит в основании рассуждений Тиссо: связь между двумя географическими изображениями одной и той же местности в окрестности любой, лишь бы только не особенной точки приближенно выражается некоторым аффинным соответствием. Применяя наши прежние теоремы об аффинных преобразованиях, мы, действительно, получаем все так называемые „предложения Тиссо".

Я напомню только главные моменты. Мы знаем, что прежде всего нужно обратить внимание на определитель аффинного преобразования, здесь, следовательно, на определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)_0 & \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)_0 \\ \left(\frac{\partial\chi}{\partial x}\right)_0 & \left(\frac{\partial\chi}{\partial y}\right)_0 \end{vmatrix},$$

который, как известно, называют функциональным определителем функций φ, χ в точке $x = x_0$, $y = y_0$. Случай $\Delta = 0$ в этих применениях всегда исключают, ибо тогда небольшая часть x-y-плоскости, окружающая точку x_0, y_0, изображается дугой некоторой кривой в ξ-η-плоскости, а такое изображение географ едва ли сочтет за приемлемую карту. Поэтому мы должны здесь всегда принимать $\Delta \neq 0$. Раньше мы (стр. 125) уже составили себе наглядную картину всех деталей такого аффинного преобразования; поэтому мы можем теперь сразу перенести сюда из прежнего такое предложение: окрестность точки ξ_0, η_0 получается с применяемой здесь точностью из окрестности точки x_0, y_0, если подвергнуть эту последнюю чистым деформациям в двух взаимно перпендикулярных направлениях и повернуть ее потом еще на некоторый подходящий угол. В книге Тиссо вы увидите, что он, действительно, выводит это предложение ad hoc наглядным образом, так что вы имеете здесь интересный пример того, как представители прикладных наук своими силами удовлетворяют математическим запросам своих дисциплин; математику в таких случаях эти вещи кажутся, конечно, очень простыми, но все же является поучительным для него знать, в чем нуждаются эти прикладные науки.

Теперь, наконец, я рассмотрю еще один, последний, общий класс точечных преобразований.

3. Наиболее общие взаимно однозначные непрерывные точечные преобразования

Все функции, которыми мы до сих пор пользовались для отображения, были непрерывными и сколько угодно раз диференцируемыми и даже аналитическими (т. е. разложимыми в ряд Тейлора); зато мы допускали также и многозначные, даже бесконечно-многозначные функции (например, логарифм). Теперь же наше главное требование будет заключаться как раз в том, чтобы наши отображающие функции были взаимно однозначными без всякого исключения, а во всем остальном будем требовать только их непрерывности, не делая никаких предположений о существовании производных и т. д. Задача наша сводится к отыскиванию тех свойств геометрических фигур, которые остаются неизменными при этих наиболее общих взаимно однозначных и непрерывных преобразованиях.

Представьте себе, например, что вы изготовили какую-нибудь поверхность или тело из резины и наметили на ней какие-нибудь фигуры. Что в этих фигурах останется неизменным, если вы станете самым произвольным образом деформировать резину (растягивать, сжимать изгибать), не разрывая ее?

Совокупность свойств, получаемых при изучении этого вопроса, образует область так называемого Analysis situs („анализ положения"), можно было бы сказать — область учения о чистейших соотношениях положения, совершенно независящих от отношений, связанных с понятием величины. Это название впервые ввел Риман (Riemann), который в своей знаменитой работе 1857 г., посвященной теории абелевых функций [1]), пришел к необходимости

[1]) „Theorie der Abelschen Funktionen", „Journal für die reine und angewandte Mathematik", Bd. 54; Gesammelte mathematische Werke (2 Aufl., Leipzig 1892), S. 88. — Риман употребляет здесь слово „анализ", примыкая к Лейбницу, в его первоначальном методическом смысле, а не в том

подобных исследований, исходя из теоретико-функциональных интересов. Впрочем, и после этого часто бывало так, что в геометрии совершенно умалчивают об Analysis situs и обращаются к этому учению только в теории функций, когда в ней обнаруживается потребность.

Но не так поступает Мёбиус (Möbius), который занимается Analysis situs в своей работе 1863 г.[1]). Исходя из чисто геометрических интересов, он называет там фигуры, которые получаются одна из другой посредством взаимно однозначных непрерывных деформаций, элементарно-соответственными (elementarverwandt), ибо свойства, инвариантные по отношению к этим преобразованиям, являются наиболее простыми из всех возможных свойств.

Здесь мы ограничимся только исследованиями поверхностей. Сюда относится прежде всего одно открытое Мёбиусом свойство, которое еще не заметил Риман, а именно, деление поверхностей на односторонние и на двусторонние. Мы говорили уже раньше (стр. 42) об одностороннем листе Мёбиуса, и мы видели, что, непрерывно двигаясь по его поверхности, можно незаметно перейти с одной его стороны на другую, так что здесь теряет смысл различение двух сторон. Ясно, что это свойство сохраняется при всех непрерывных деформациях и что поэтому в Analysis situs действительно следует заранее различать односторонние и двусторонние поверхности.

смысле, какой это слово приобрело в качестве математического термина. [Термин „Analysis situs“, а также „Geometria situs“ создал еще Лейбниц (рукописные работы и переписка с Гюйгенсом), имея в виду, однако, скорее особое прямое геометрическое исчисление (Calculus situs), не пользующееся алгеброй, в противоположность аналитической геометрии. Первой работой, специально посвященной Analysis situs, были „Предварительные исследования по топологии“ („Vorstudien zur Topologie“, 1847) Листинга (J. B. Listing); в этой работе Листинг впервые предложил заменить лейбницево название словом „топология“ (от греческого слова τόπος — место), которое в настоящее время столь же употребительно, как Analysis situs и удобнее последнего тем, что имеет производное прилагательное „топологический“. Названная работа Листинга издана по-русски в 1932 г. ГТТИ.]

[1]) „Theorie der elementaren Verwandtschaft“, Berichte über die Verhandlungen der Königlich. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften, mathematisch-physikalische Klasse, Bd. 15, S. 18 ff., Gesammelte Werke, Bd. II. (Leipzig 1886), S. 433 ff.

Здесь мы ради простоты займемся только двусторонними поверхностями, тем более, что только они обыкновенно и применяются в теории функций; впрочем, теория односторонних поверхностей не является существенно более трудной. Оказывается, что всякую (двустороннюю) поверхность вполне характеризуют, в смысле Analysis situs, два натуральных числа: число μ ее пограничных кривых (контуров) и число p (так называемый „род" или „ранг", „Geschlecht") не разбивающих ее на части ее возвратных сечений (Rückehrschnitt) или „прорезов" (сечений, не имеющих общих точек с контурами); точнее говоря, две двусторонние поверхности могут быть тогда

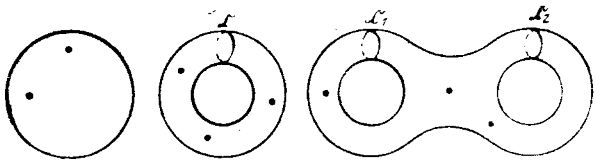

Рис. 75.

и только тогда взаимно однозначно и непрерывно сопряжены друг с другом (являются „элементарно-соответственными" или, — как теперь говорят, — гомеоморфными), когда для них оба эти числа p и μ совпадают. Мы зашли бы слишком далеко, если бы я захотел изложить здесь доказательство этой теоремы; я могу только разъяснить на отдельных примерах значение обоих чисел μ и p.

Представим себе расположенными рядом шар, кольцевую поверхность и, наконец, поверхность двойного кольца (имеющего форму кренделя), как это схематически показано на рис. 75. Все три поверхности являются замкнутыми, т. е. они не имеют пограничных контуров: $\mu = 0$. В первом случае (шар) каждое сечение по замкнутой линии разбивает поверхность на две отдельных части, т. е. также и $p = 0$. Во втором случае (кольцо) меридиан $\mathfrak{C}$ представляет замыкающееся в себе сечение, которое не разбивает поверхность; но если он уже проведен, то всякий другой замкнутый прорез действительно разбивает поверхность; это мы и имеем в виду, когда говорим, что $p = 1$. Наконец, в третьем примере $p = 2$, как показывают два различных меридиана $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{C}_2$ (по одному на каждом ушке). Прибавляя новые ушки (кольца), можно притти к поверхностям с произвольным p. Если же мы желаем также и числу μ дать какое-нибудь отличное от нуля значение, то достаточно проделать в этих поверхностях μ маленьких дырочек, так называемых „проколов", которые каждый раз дают некоторую контурную линию. Таким образом мы действительно можем образовать поверхности с любыми значениями p и μ, и с ними должны быть гомеоморфны все другие поверхности с такими же p, μ, как бы они ни отличались от первых поверхностей по своему внешнему виду. Теория функций дает много примеров таких поверхностей.

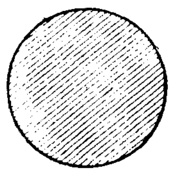

Рис. 76.

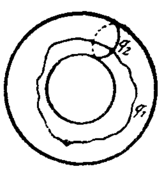

Рис. 77.

Я должен разъяснить еще термин „связность", который ввел Риман; этим термином он обозначает число $2p+\mu$ и называет соответствующую поверхность $(2p+\mu)$ связной. Если поверхность односвязна $(2p+\mu=1)$, то $p=0$, $\mu=1$, т. е. она гомеоморфна шару с одним проколом; такой шар может быть также непрерывно преобразован расширением этого прокола в плоский диск (рис. 76).

Далее, Риман вводит понятие о поперечном сечении или „разрезе" (Querschnitt), т. е. о сечении, которое ведет от одной пограничной точки (на контуре) к другой такой же точке. О разрезах можно, следовательно, говорить только тогда, когда, действительно, имеются контуры, следовательно, когда $\mu > 0$. Имеет место такое предложение: каждый разрез уменьшает связность на единицу, так что, в частности, каждую поверхность с $\mu > 0$ можно преобразовать в односвязную при помощи $2p+\mu-1$ разрезов. Если, например, возьмем кольцевую поверхность (рис. 77) с одним проколом $(p=\mu=1)$, то можно сперва провести разрез q_1, начинающийся и оканчивающийся в этом проколе, а затем второй разрез q_2 так, чтобы он начинался и заканчивался где-нибудь на первом разрезе, проходя по поверхности одинаково с прежним прорезом, не разбивающим поверхности. Тогда связность действительно уменьшится от $2 \cdot 1 + 1 = 3$ до 1.

Что касается литературы, по Analysis situs, то суммарное изложение, охватывающее не только поверхности, но и образы с произвольной протяженностью, дано в Энциклопедии математических наук, а именно, в реферате М. Дена (M. Dehn) и Гегарда (P. Heegaard) (III А В 3), который, правда, написан очень абстрактно. Более легко читаемое, доступное также и для новичка изложение, которое абстрактной теории предпосылало бы развитие общих идей на простых примерах, было бы весьма желательно [1]).

То, что Analysis situs находит себе применение в физике, в частности в теории потенциала, является хорошо известным. Но он имеет точки соприкосновения также и со школьным преподаванием, а именно, в виде эйлерового предложения о многогранниках, о котором я в заключение скажу еще несколько слов. Эйлер (Euler) подметил, что для обыкновенного многогранника с плоскими гранями, имеющего E вершин, K ребер и F граней, всегда оправдывается такое соотношение:

$$E + F = K + 2.$$

Если теперь станем как-либо взаимно однозначно и непрерывно деформировать этот многогранник, то в этих трех числах, а значит, и в этом равенстве, ничто не изменится; следовательно, это равенство сохранит силу и в том случае, если E, F, K будут означать числа вершин, поверхностей (граней) и ребер при любом разбиении шаровой поверхности или вообще какой-нибудь гомеоморфной ей поверхности, лишь бы только каждая частичная область (грань) была односвязна. И вот оказывается, что эту теорему легко можно сразу обобщить на

---

[1] Более новым изложением является книга B. v. Kerékjartó, Vorlesungen über Topologie (до сих пор появился Bd. 1). Berlin, Springer, 1923. — В Энциклопедии математических наук вскоре должен появиться дополнительный реферат Тице (H. Tietze) по Analysis situs. [По-русски имеется обзорный доклад П. С. Александрова „Об основных направлениях современной топологии" (Труды всероссийского съезда математиков, 1927) и „Курс топологии" акад. Н. Г. Чеботарева (литогр. изд., Казань).]

поверхности любого ранга. Если какую-нибудь поверхность, допускающую ровно p не разбивающих ее на части прорезов, разделить посредством K конечных линий на F односвязных участков поверхности и если при этом образуется E вершин, то

$$E + F = K + 2 - 2p.$$

Я предоставляю вам самим подобрать к этому примеры, а также найти доказательство или прочесть о нем у Дена-Гегарда; имеют место, конечно, еще гораздо более широкие обобщения этой теоремы.

На этом мы оставляем общее учение о точечных преобразованиях и попытаемся дать обзор важнейших классов таких преобразований, которые переводят точки в пространственные элементы иного рода.

IV. ПРЕОБРАЗОВАНИЯ С ИЗМЕНЕНИЕМ ПРОСТРАНСТВЕННОГО ЭЛЕМЕНТА

1. Двойственные преобразования

Первый такой класс состоит из тех соответствий, которые в двумерной области переводят точку в прямую, и наоборот, а в трехмерной обменивают точку с плоскостью. Я ограничиваюсь здесь первым случаем (плоскостью), а во всем остальном следую тому ходу идей, который впервые был употреблен Плюккером в 1931 г. во второй части его уже упомянутой выше (стр. 101) работы „Analytisch-geometrischen Entwicklungen“. При этом исходной точкой является аналитическая формулировка.

Первая идея Плюккера заключается, как мы уже знаем (стр. 104), в том, чтобы провести полную параллель между константами u, v, входящими в уравнение прямой, написанное, например, в форме:

$$ux + vy = 1, \qquad (1)$$

и рассматриваемыми в качестве „координат прямой“, и между обыкновенными (декартовыми) координатами точки, а затем построить здание аналитической геометрии двумя совершенно аналогичными „взаимными“ или „дуальными“ способами, пользуясь этими двумя видами координат.

Так, на плоскости соответствуют одна другой кривая, изображаемая уравнением $f(x, y) = 0$ в координатах точки как геометрическое место точек, и кривая, определяемая в координатах прямой уравнением $g(u, v) = 0$, как огибающая однократно-бесконечного семейства прямых.

Преобразование в собственном смысле, которое мы хотим теперь рассмотреть, получается, конечно, лишь тогда, когда мы, наряду с рассматривавшейся до сих пор одной плоскостью E, введем еще вторую плоскость E' и свяжем координаты u, v прямой на E с координатами x', y' точки на E'. Самое общее преобразование такого типа должно быть, следовательно, задано двумя уравнениями:

$$u = \varphi(x', y'), \quad v = \chi(x', y'), \qquad (2)$$

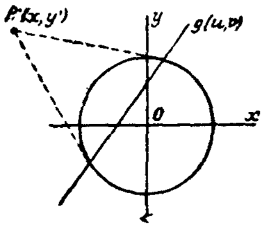

Рис. 78.

т. е. с каждой точкой x', y' на плоскости E' сопрягается та прямая на плоскости E, уравнение которой получается после подстановки в (1) этих значений (2) для u и v. Рассмотрим сперва

1) простейший пример такого преобразования, а именно преобразование, определяемое уравнениями:

$$u = x', \quad v = y'; \qquad \textbf{(3)}$$

это преобразование относит просто каждой точке x', y' плоскости E' прямую

$$x'x + y'y = 1 \qquad (3a)$$

на плоскость E. Известно, что это как раз та прямая, которая является полярой точки x', y' (мы предполагаем теперь, что плоскости E, E' наложены одна на другую так, что их координатные оси совпадают) по отношению к кругу радиуса единица с центром в начале координат ($x^2 + y^2 = 1$); наше преобразование является, следовательно, известным полярным соответствием (Polarenverwandschaft) по отношению к кругу (рис. 78).

Мы замечаем, что для определения этого соответствия достаточно вместо обоих уравнений (3) взять одно лишь уравнение (3a), ибо это последнее представляет собой уравнение прямой, соответствующей каждой точке x', y'. Поскольку уравнение (3a) совершенно симметрично относительно x, y, с одной стороны, и x', y' — с другой, то обе плоскости E, E' должны по отношению к нашему преобразованию играть совершенно одинаковую роль, т. е. каждой точке на E тоже должна соответствовать некоторая прямая на E', и в случае взаимного наложения этих плоскостей одной и той же точке должна соответствовать одна и та же прямая независимо от того, считаем ли эту точку принадлежащей E или E'. Ввиду первого свойства это преобразование в более узком смысле называют двойственным или дуалистическим (dualistisch), ввиду же второго — взаимным (reziprok). Можно, следовательно, не различая обеих плоскостей, просто говорить о сопряжении со всяким полюсом определенной поляры и выразить тогда свойство взаимности уже указанным раньше (стр. 101) образом.

По поводу дальнейших свойств этого преобразования замечу, что с кривой, пробегаемой на плоскости E' точкой x', y', мы будем сопрягать согласно принципу двойственности как соответствующий образ кривую на плоскости E, огибающую соответствующие прямые u, v.

2) Совершенно аналогично нашим прежним разъяснениям о наиболее общих „коллинеациях“ можно легко доказать, что самое общее двойственное соответствие получается, если, обобщая уравнения (3), положить u, v равными общим дробно-линейным функциям от x', y' с одинаковым знаменателем:

$$\left.\begin{aligned} u &= \frac{a_1x' + b_1y' + c_1}{a_3x' + b_3y' + c_3}, \\ v &= \frac{a_2x' + b_2y' + c_2}{a_3x' + b_3y' + c_3}. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Вводя эти выражения для u и v в уравнение (1) и умножая обе его части на общий знаменатель, получаем, в силу произвольности девяти коэфициентов $a_1 \ldots, c_3$, наиболее общее уравнение:

$$\begin{aligned} a_1xx' + b_1xy' + c_1x + a_2yx' + b_2yy' + \\ + c_2y - a_3x' - b_3y' - c_3 = 0, \end{aligned} \tag{4a}$$

линейное как относительно x, y, так и относительно x', y'.

Но и обратно, каждое такое уравнение, „билинеарное" относительно x, y и x', y', представляет собой некоторое двойственное соответствие между плоскостями E, E'; ибо, коль скоро одна из этих пар координат фиксирована, т. е. коль скоро рассматривается фиксированная точка на одной из плоскостей, левая часть указанного уравнения является линейной функцией от остальных двух координат, так что уравнение изображает некоторую прямую на другой плоскости, сопряженную с этой фиксированной точкой в первой плоскости.

3) Но это соответствие в общем случае не является уже взаимным в определенном выше смысле; а именно, взаимным оно будет только в том случае, если (4a) каждые два симметричных члена имеют одинаковые коэфициенты, т. е. если это уравнение имеет вид:

$$Axx' + B(xy' + yx') + Cyy' + D(x + x') + \\ + E(y + y') + F = 0. \tag{5}$$

Определенное таким образом преобразование опять-таки хорошо известно из учения о конических сечениях; оно выражает сопряжение между полюсом и полярою по отношению к коническому сечению:

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0.$$

Всякое такое полярное сопряжение является некоторым двойственным взаимным соответствием.

Вслед за изложенным можно непосредственно перейти к рассмотрению одного существенно более общего класса преобразований с переменой элемента пространства, а именно класса преобразований касания или „касательных" преобразований (Berührungstransformationen).

2. Касательные преобразования

Эти преобразования, названные так Софусом Ли (Sophus Lie), получаются, если вместо билинеарного уравнения (4a) положить в основу какое-либо уравнение высшей степени относительно четырех точек на обеих плоскостях:

$$\Omega(x, y; x', y') = 0, \tag{1}$$

удовлетворяющее, конечно, необходимым условиям непрерывности; это уравнение называют по Плюккеру Aequatio directrix или направляющим уравнением. Для плоскости все относящееся сюда имеется уже в вышеупомянутом произведении (стр. 259—265) Плюккера. Если фиксировать сперва x, y, т. е. рассматривать определенную точку $P(x, y)$ на E (рис. 79), то уравнение $\Omega = 0$, рассматриваемое как уравнение для текущих координат x', y', изображает некоторую определенную кривую C на плоскости E'; эту кривую мы сопрягаем с точкой P как новый элемент плоскости E' (раньше таким элементом была прямая). Если же теперь фиксировать какую-нибудь точку $P'(x', y')$

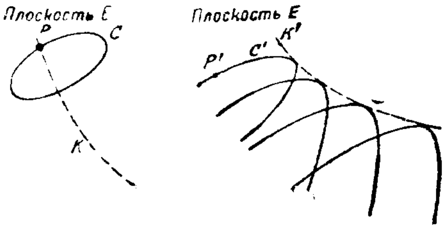

Рис. 79.

на E', например, какую-нибудь точку кривой C', то это же уравнение $\Omega = 0$, в котором мы теперь приписываем постоянные значения второй паре переменных x', y', а x, y считаем текущими координатами, определяет некоторую кривую C на E, и эта кривая должна, конечно, пройти через первоначальную точку P. Этим мы устанавливаем соответствие между точками P плоскости E и ∞^2 (двукратной бесконечностью) кривых на плоскости E', а также — соответствие между точками P' на E' и ∞^2 кривых C на E совершенно аналогично прежнему соответствию между точками и прямыми.

Если теперь точка P станет двигаться на плоскости E, описывая совершенно произвольную (обозначенную пунктиром) кривую K, то каждому отдельному положению точки P будет соответствовать определенная кривая C' на плоскости E'. Но, чтобы из этого однократно-бесконечного семейства кривых C' получить на E' одну только определенную кривую, которую мы будем считать сопряженной с кривой K на E, мы перенесем на рассматриваемый здесь случай общий „принцип огибающей", уже примененный нами при двойственном соответствии: кривой K мы относим ту кривую K' на плоскости E', которая огибает все кривые C', соответствующие на основании уравнения $\Omega = 0$ отдельным точкам кривой K. Таким образом мы действительно получили из направляющего уравнения $\Omega = 0$ такое соответствие между плоскостями, при котором каждой кривой одной плоскости соответствует определенная кривая другой: ибо можно провести такие же точно рассуждения, исходя, наоборот, из произвольной кривой K' на плоскости E'.

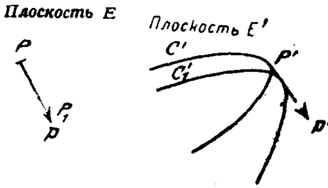

Рис. 80.

Чтобы представить эти рассуждения в аналитической форме, заменим мысленно кривую K многоугольником с очень маленькими прямолинейными сторонами, — как это для наглядности охотно делают в диференциальном исчислении — и спросим себя, что будет соответствовать отдельно взятой одной такой стороне многоугольника. При этом, конечно, следует всегда иметь в виду предельный переход к кривой, так что окончательно под стороной многоугольника следует понимать не что иное, как совокупность точки P и направления ее движения (направления касательной к кривой K в этой точке) — так называемый линейный элемент.

Возьмем в этом направлении, считая от точки P, некоторую точку P_1 (рис. 80) с координатами $x + dx$, $y + dy$, где dx, dy произвольно малы и в конце концов стремятся к нулю, а $\frac{dy}{dx}$ все время имеет определенное значение p, характеризующее заданное направление. Точке P соответствует на плоскости E' кривая C', уравнение которой относительно текущих координат x', y' имеет:

$$\Omega(x, y; x', y') = 0,$$

а в точке P_1 — кривая C_1' с уравнением

$$\Omega(x + dx, y + dy; x', y') = 0.$$

Разлагая левую часть последнего уравнения по степеням dx и dy и принимая во внимание ввиду окончательного предельного перехода только линейные члены, получаем для C_1' уравнение:

$$\Omega(x, y; x', y') + \frac{\partial\Omega}{\partial x}\,dx + \frac{\partial\Omega}{\partial y}\,dy = 0.$$

Из обоих этих уравнений (для C' и C_1') получаются координаты x', y' точки пересечения P' кривых C' и C_1', которая в пределе обращается в точку касания кривой C' с обверткой K'; эти уравнения можно также, поскольку $\frac{dy}{dx} = p$, заменить уравнениями:

$$\left.\begin{aligned} &\Omega(x, y; x', y') = 0, \\ &\frac{\partial\Omega}{\partial x} + \frac{\partial\Omega}{\partial y}\cdot p = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Но кривые C' и C_1' имеют в точке P' в пределе общее направление касательной $p' = \frac{dy'}{dx'}$, которое одновременно является также и направлением обвертки K' в точке P'. Поскольку же $\Omega = 0$ является уравнением кривой C' с текущими координатами x', y', то это направление касательной определяется из уравнения:

$$\frac{\partial\Omega}{\partial x'}\,dx' + \frac{\partial\Omega}{dy'}\,dy' = 0,$$

или

$$\frac{\partial\Omega}{\partial x'} + \frac{\partial\Omega}{\partial y'}\cdot p' = 0. \qquad (3)$$

Если, следовательно, из всей кривой K известна одна только ее точка P и направление p касательной в ней, то этим самым определена точка P' соответствующей кривой K' вместе с направлением последней в этой точке. Говорят поэтому, что наше преобразование относит в силу уравнений (2), (3) каждому линейному элементу x, y, p кривой на плоскости E определенный линейный элемент x', y', p' на плоскости E'.

Применяя это рассуждение к каждой стороне аппроксимирующего кривую многоугольника и соответственно к каждому ее линейному элементу, получим на плоскости E' стороны многоугольника, аппроксимирующего соответствующую кривую K' и соответственно линейные элементы этой кривой. Поэтому уравнения (2), будучи решенными относительно x', y', представляют аналитически кривую K', если только x, y, p пробегают значения координат и направления касательной во всех точках кривой K (рис. 81).

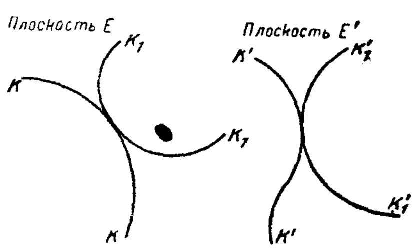

Рис. 81.

Теперь становится также ясным, почему Ли назвал эти преобразования „касательными". А именно, если две кривые на плоскости E касаются одна другой, то это означает не что иное, как то, что они имеют общий линейный элемент; но тогда и соответствующие им кривые на плоскости E' также должны иметь общий линейный элемент, т. е. общую точку с общим направлением в ней. Касание двух кривых является, следовательно, свойством инвариантным при этом преобразовании, на что и должно указывать его название. Ли развил учение об этих касательных преобразованиях существенно дальше, обобщив его для случая пространства; он предпринял в 1896 г., совместно с Шефферсом (G. Scheffers), систематическое изложение этого учения в „Геометрии касательных преобразований", но, к сожалению, подвинулся не намного дальше первого тома [1]).

После этого краткого изложения теории преобразований с переменой пространственного элемента я хочу оживить эту теорию хотя бы несколькими наглядными примерами, чтобы показать, какое значение эти вещи могут иметь в прикладных науках.

[1]) „Geometrie der Berührungstransformationen", Bd. 1, Лейпциг 1896. Первые три главы второго тома были напечатаны уже после смерти Ли в „Mathematische Annalen", Bd. 59, 1904.

3. Некоторые примеры

Разрешите мне сперва сказать несколько слов о двойственных преобразованиях и о той роли, какую они играют в учении о форме алгебраических кривых. Присмотримся, как изменяются типичные формы кривых при двойственных преобразованиях, например при взаимном полярном соответствии относительно какого-нибудь конического сечения; при этом нам придется, конечно, ограничиться очень немногими характерными случаями. Так, в случае кривых третьего порядка, я отмечаю сперва тип кривой нечетного хода, которая всякой прямой пересекается в одной или в трех точках.

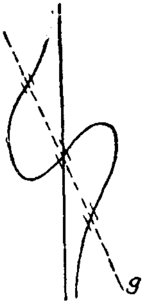

Рис. 82.

На приведенном эскизном наброске (рис. 82) эта кривая имеет одну асимптоту; но из нее можно сразу получить кривую с тремя асимптотами, проективно преобразовывая плоскость чертежа таким образом, чтобы какая-нибудь прямая, пересекающая нашу кривую трижды, перешла в бесконечно удаленную прямую. Во всяком случае кривая имеет три вещественные точки перегиба, которые имеют особое свойство — лежать на одной прямой g.

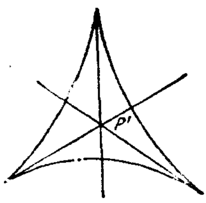

Рис. 83.

При дуализировании (двойственном преобразовании) этой кривой получается кривая третьего класса, к которой из каждой точки можно провести одну или три вещественные касательные. Точке перегиба соответствует при этом острие, что, конечно, следует себе уяснить обстоятельным размышлением; вы можете, между прочим, найти подробное развитие этих идей в моих прежних лекциях по геометрии. Возникающая при этом кривая третьего класса (рис. 83) имеет, следовательно, в целом три острия, а касательные в них должны проходить через одну и ту же точку P', которая дуально соответствует прямой g, содержащей наши три точки перегиба.

Аналогичные краткие замечания я сделаю еще о кривой четвертого порядка и четвертого класса. Кривая четвертого порядка может иметь форму овала с одной впадиной; могут даже встретиться кривые с двумя, тремя и четырьмя впадинами (рис. 84). В первом случае имеются две вещественные точки перегиба и одна вещественная

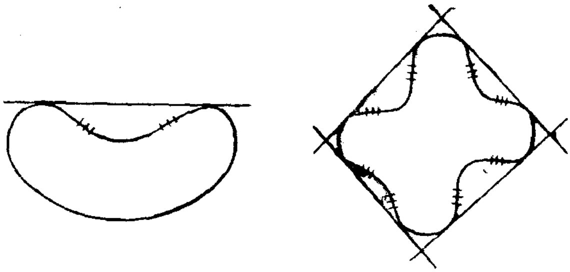

Рис. 84.

двойная касательная, а в остальных — до восьми точек перегиба и до четырех двойных касательных. Дуализируя, мы должны к уже сказанному раньше прибавить еще то соображение, что двойной касательной взаимно соответствует двойная точка. Таким путем получаются типы кривых четвертого класса, имеющие от двух до восьми остриев и от одной до четырех двойных точек, как эскизно показано на рис. 85.

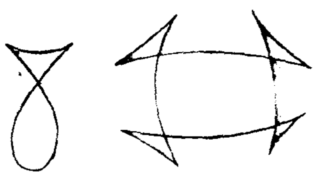

Рис. 85.

Более детальное изучение различных форм алгебраических кривых представляет своеобразную прелесть; но я не могу, к сожалению, останавливаться на этом подробнее и должен удовольствоваться этими краткими указаниями [1]). Они, однако, достаточно ясно показывают,

[1]) См. F. Klein, Gesammelte mathematische Abhandlungen, Bd. II. S. 89 ff., S. 136 ff., S., 99 ff., Berlin. Springer, 1922; — две работы: „Über eine neue Art Riemannscher Flächen“ и первую работу „Über den Verlauf der Abelschen Integrale bei den Kurven 4. Grades“.

как наши двойственные преобразования подводят под один и тот же закон вещи, которые для наивного представления настолько различны, насколько это только возможно.

Теперь я перейду к применениям теории касательных преобразований; здесь интересным образом обнаруживается, что идея касательного преобразования, как и большинство идей действительно удачных в теоретическом отношении, находит себе на практике широкое поле применения и что ее там действительно применяли еще задолго до ее теоретической разработки. Я имею здесь в виду, главным образом, старое учение о зубчатых колесах. Оно образует специальную главу кинематики — общего учения о подвижных механизмах, которое, например, для техники машиностроения имеет центральное значение. К этой же кинематике принадлежат и те прямила, один пример которых мы недавно имели. К кинематике тоже относится то, что я уже не раз должен был говорить в этом курсе: я могу здесь, конечно, выхватывать только небольшие части из каждой отдельной дисциплины и на простых примерах, по возможности более наглядно, выяснять их смысл и значение. Разобраться же в подробностях после этих набросков вы должны стараться сами, пользуясь специальными курсами; в качестве главного средства для ориентировки во всей области кинематики я рекомендую относящийся сюда реферат А. Шенфлиса (A. Schönflies) в Энциклопедии математических наук (IV, 3), который дает также обильные сведения о богатейшей литературе этого предмета.

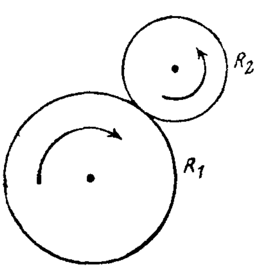

Рис. 86.

Задача конструкций из зубчатых колес заключается в переносе равномерного движения с одного колеса на другое. Поскольку же при этом должны быть перенесены также и силы, то недостаточно заставить катиться одно колесо по другому (рис. 86), а необходимо еще снабдить одно колесо выступами, зубцами, которые входили бы в выемки другого. Поэтому задача заключается в придании профилям или образующим этих зубцов такой формы, чтобы равномерное вращение одного колеса вызывало тоже равномерное вращение другого колеса. Такая постановка вопроса представляется, конечно, и в геометрическом отношении очень интересной. Я сразу же сообщу важнейшую часть решения этой проблемы. А именно, зубцы одного колеса могут быть выбраны по существу произвольным образом, с такими самоочевидными и обусловленными практической применимостью ограничениями, как, например, то, что отдельные зубцы не должны сталкиваться друг с другом и т. п.; зубцы же второго колеса оказываются тогда вполне определенными, а именно, они получаются из зубцов первого колеса посредством некоторого раз навсегда устанавливаемого касательного преобразования.

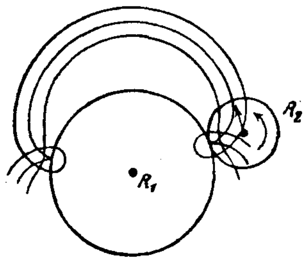

Рис. 87.

Здесь будет достаточно дать краткое пояснение хода мыслей, приведшего к этой теореме, не останавливаясь на полном ее доказательстве. Непосредственно видно, что все зависит только от относительного движения обоих колес. Можно поэтому считать, например, что первое колесо R_1 совершенно неподвижно, а второе R_2 кроме своего вращательного движения кружит еще вокруг R_1. При этом каждая точка, неподвижно соединенная с R_2, описывает в неподвижной плоскости колеса R_1 некоторую эпициклоиду (рис. 87), причем эта последняя либо будет вытянутой, либо будет иметь острия, либо делать петли, смотря по тому, лежит ли рассматриваемая точка внутри, на или вне периферии колеса R_2. Таким образом каждой точке подвижной плоскости колеса R_2 соответствует определенная кривая на неподвижной плоскости колеса R_1; если к уравнению, осуществляющему это соответствие, подыскать по вышеуказанному способу касательное преобразование, то как раз и получается то характерное для зубчатых колес касательное преобразование, которое мы имели в виду. А именно, легко убедиться в том, что две кривые, соответствующие друг другу в силу такого преобразования касания, действительно катятся одна по другой во время относительного движения колес.

Наконец, еще несколько слов о том, какой вид принимает намеченный здесь теоретический принцип при практическом конструировании зубчатых колес. Я приведу только простейший случай так называемого цевочного или прямобочного зацепления (Triebstockverzahnung). Здесь зубцы колеса R_2 являются просто точками (рис. 88) или, вернее, так как точки не дали бы никакой передачи сил, маленькими круглыми цапфами или шипами, так называемыми цевками (Triebstöcke). Каждому такому маленькому кругу соответствует при касательном преобразовании некоторая кривая, которая очень мало отличается от эпициклоиды, а именно, является кривой, параллельной к ней и отстоящей от нее на длину, равную радиусу цевки. По этим кривым и катятся наши кружки при вращении колеса R_2; эти кривые, следовательно образуют фланки тех зубцов, которые должны быть насажены на R_1, чтобы за них зацеплялись круглые зубцы, цевки, колеса R_2.

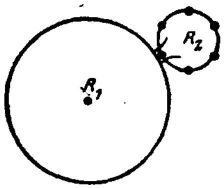

Рис. 88.

На модели, которую я здесь показываю, вы, действительно, видите, как начальные дуги этих кривых реализованы в профилях зубцов колеса R_1, — каждая дуга такой величины, чтобы всякий раз один зуб зацеплялся вслед за другим.

Здесь у меня имеются модели еще двух зацеплений, которые также очень часто применяются на практике, а именно, — эвольвентного и циклоидного зацеплений [1]). У первой из них, — я буду здесь очень краток, — профили зубцов обоих колес состоят из эвольвент (развертывающих) круга (рис. 89), т. е. из кривых, которые образуются при разматывании с круга натянутой нити и эволюты

[1]) Все эти модели сконструированы Ф. Шиллингом (F. Schilling) и продаются у М. Шиллинга в Лейпциге.

(развертки) которых являются, следовательно, кругами; у второй же модели эти профили состоят из дуг циклоид.

Я надеюсь, что этим я дал вам по крайней мере первоначальную ориентировку относительно тех проблем, о которых идет речь в учении о преобразованиях с переменой элемента пространства; теперь же, перед тем как совсем оставить этот второй раздел, трактующий вообще о преобразованиях, мне остается остановиться еще в виде приложения на одной важной главе, которая не должна отсутствовать в энциклопедии геометрии, а именно на пользовании мнимыми элементами.

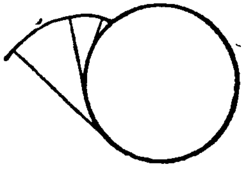

Рис. 89.

V. ТЕОРИЯ МНИМЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Учение о мнимом, как известно, получило свое развитие прежде всего в алгебре и анализе, в особенности в учении об уравнениях и в теории функций комплексного переменного, где оно отпраздновало свои величайшие триумфы. Но вскоре и в аналитической геометрии начали придавать переменным x, y комплексные значения $x = x_1 + ix_2$, $y = y_1 + iy_2$ и присоединили, таким образом, к действительным точкам широкий класс комплексных точек, не связывая сперва эту терминологию, взятую из анализа, с каким-либо геометрическим содержанием в собственном смысле слова.

Польза таких нововведений должна, конечно, заключаться в том, что они делают излишним то различение отдельных случаев, которое становится необходимым, если ограничиться действительными значениями переменных, и дают возможность высказывать общие теоремы, не допускающие никаких исключений. Совершенно аналогичные соображения привели нас уже в проективной геометрии к введению бесконечно удаленных точек, а также заполняемых ими бесконечно удаленных плоскости и прямых. И в первом и во втором случаях мы делаем то, что довольно удачно называют „присоединением (Adjunktion) несобственных точек" к собственным, наглядно воспринимаемым точкам пространства.

Мы выполним теперь оба присоединения одновременно. Для этого введем, как и раньше, однородные координаты, следовательно, положим, чтобы оставаться пока что в пределах одной плоскости, $x:y:1 = \xi:\eta:\tau$ и будем допускать для ξ, η, τ также и комплексные значения. Систему же значений 0, 0, 0 мы исключаем.

Рассматривая при этих условиях, например, однородное квадратное уравнение

$$A\xi^2 + 2B\xi\eta + C\eta^2 + 2D\xi\tau + 2E\eta\tau + F\tau^2 = 0, \tag{1}$$

мы назовем совокупность всех как действительных, так и комплексных систем значений ξ, η, τ, ему удовлетворяющих (независимо от того, представляют ли они конечные или бесконечно удаленные точки), кривой второго порядка. Очень часто такую совокупность называют просто коническим сечением, но это название может вызвать недоразумения, если не у людей знающих предмет, то у многих непривыкших к применению мнимых элементов; ведь определенная таким образом кривая может, например, не иметь ни одной вещественной точки.

Рассмотрим комбинацию уравнения (1) с линейным уравнением:

$$\alpha\xi + \beta\eta + \gamma\tau = 0, \tag{2}$$

которое будем считать определением кривой первого порядка, т. е. прямой линии. Эти два уравнения имеют ровно два общих решения в виде троек $\xi:\eta:\tau$, т. е. всякая кривая первого порядка и всякая кривая второго порядка всегда „пересекаются“ ровно в двух точках, которые могут, конечно, быть вещественными или комплексными, конечными или бесконечно удаленными, различными или совпадающими. При этом, конечно, мыслимы вырождающиеся случаи, которые приводят к исключениям из этой теоремы. Если левая часть уравнения (1) распадается на два линейные множителя и если один из них идентичен с левой частью уравнения (2), иными словами, если кривая второго порядка является „парой прямых“, одна из которых совпадает с прямой (2), то каждая точка этой последней будет общей точкой (обоих образов). Это сводится к тому, что обращаются в нуль все коэфициенты того квадратного уравнения, которое получается при исключении одной неизвестной из обоих заданных уравнений. Еще более широкие вырождения получаются, конечно, в том случае, если левая часть одного или даже обоих заданных уравнений сама тождественно обращается в нуль:

$$A = B = \ldots = F = 0$$

или

$$\alpha = \beta = \gamma = 0.$$

В дальнейшем, однако, я оставлю совершенно в стороне все эти и подобные им особенности, которые по существу вещей являются тривиальными. При таком условии мы имеем право, восходя, например, к рассмотрению двух кривых второго порядка, высказать теорему о том, что они всегда имеют ровно четыре общие точки.

Введем теперь в пространстве однородные координаты $x:y:z:1 = \xi:\eta:\zeta:\tau$ и будем им придавать произвольные комплексные значения, выключая снова систему $0:0:0:0$. Совокупность решений одного линейного или соответственно квадратного однородного уравнения относительно этих четырех переменных назовем тогда поверхностью первого порядка (плоскостью) или соответственно поверхностью второго порядка. Тогда опять-таки, если отбросить тривиальные исключения, имеет, вообще говоря, место та теорема, что поверхность второго порядка пересекается с плоскостью по кривой второго порядка и что две поверхности второго порядка пересекаются по пространственной кривой четвертого порядка, которая в свою очередь имеет со всякой плоскостью четыре общих точки. При этом ничего не говорится о том, имеют ли эти кривые пересечения действительные ветви или нет, лежат ли они в конечном расстоянии или в бесконечности.

И вот уже в 1822 г. Понселе в своем вышеупомянутом трактате „О проективных свойствах фигур" („Traité des propriétés projectives des figures") применил эти понятия к кругам и шарам; правда, он не пользовался однородными координатами и обусловленными ими точными аналитическими формулировками, а следовал больше своему сильному чувству геометрической непрерывности.

Будем исходить для ознакомления с его замечательными результатами в точной форме из уравнения круга:

$$(x-a)^2+(y-b^2)=r^2,$$

которое запишем в однородных координатах:

$$(\xi-a\tau)^2+(\eta-b\tau)^2-r^2\tau^2=0.$$

Пересечение этого круга с бесконечно удаленной прямой $\tau=0$ определяется, следовательно, уравнениями:

$$\xi^2+\eta^2=0, \quad \tau=0.$$

В этих уравнениях отсутствуют константы a, b, r, характеризующие первоначально заданный круг. Следовательно, любой круг пересекается с бесконечно удаленной прямой в одних и тех же двух постоянных точках:

$$\xi:\eta=\pm i, \quad \tau=0,$$

которые кратко называют (мнимыми) круговыми или циклическими точками (Kreispunkte). Совершенно таким же образом выводят, что в пространстве все шары пересекают бесконечно удаленную плоскость по одному и тому же мнимому коническому сечению:

$$\xi^2+\eta^2+\zeta^2=0, \quad \tau=0,$$

которые называют также просто (мнимым) кругом сфер (Kugelkreis) [1]).

Однако имеет место также и обратная теорема: Всякая кривая второго порядка, проходящая через обе циклические точки бесконечно удаленной прямой в ее плоскости, есть круг, и всякая поверхность второго порядка, пересекающая бесконечно удаленную плоскость по мнимому кругу, есть шар, так что здесь мы имеем дело с характеристическими свойствами круга и шара.

Я намеренно не сказал: „бесконечно удаленные" циклические точки и „бесконечно удаленный" мнимый круг, как это часто делают. А именно, расстояние циклических точек от начала координат не является определенно бес-

---

[1]) [Говорят также: „мнимый круг в бесконечности"; соответствует французскому „cercle imaginaire à l'infini".]

конечным, как это могло бы казаться на первый взгляд, но имеет форму $\sqrt{x^2+y^2} = \frac{\sqrt{\xi^2+\eta^2}}{\tau} = \frac{0}{0}$ и в силу этого оказывается неопределенным; меняя характер предельного перехода к циклическим точкам, этому расстоянию можно придать произвольное (наперед заданное) значение.

Точно так же является неопределенным и расстояние циклических точек и от всякой (другой) конечной точки; то же самое имеет место для расстояния между любой точкой мнимого круга сфер (т. е. принадлежащего бесконечно удаленной плоскости) и любой конечной точкой пространства. Этому нисколько не приходится удивляться, ибо мы ведь одновременно требовали от циклических точек, чтобы они находились на расстоянии r от некоторой конечной точки (лежали на круге радиуса r с центром в этой точке, где r может иметь произвольно заданное значение) и были также бесконечно удалены от этой последней; это кажущееся противоречие наша аналитическая формула может уничтожить лишь тем, что она приводит к полученной выше неопределенности. Эти простые вещи следует себе раз навсегда вполне уяснить, тем более, что о них часто говорят и пишут много неправильного.

Циклические точки и круг сфер дают возможность в очень красивой форме включить теорию кругов и шаров в общую теорию геометрических образов второго порядка, тогда как при элементарном изложении получается ряд кажущихся расхождений. Так, в элементарной аналитической геометрии всегда говорят только о двух точках пересечения двух кругов, так как исключение одного неизвестного из их уравнений приводит лишь к квадратному уравнению. С нашей же точки зрения всякие два круга имеют общими еще и лежащие на бесконечно удаленной прямой обе циклические точки, которых не принимает во внимание элементарное изложение; таким образом мы действительно приходим к четырем точкам пересечения, требуемым упомянутой общей теоремой о двух кривых второго порядка.

Совершенно аналогично этому всегда говорят в первую очередь только об одном круге, по которому пересекаются два шара и который может быть как действительным, так и мнимым; теперь, однако, мы знаем, что в бесконечно удаленной плоскости все шары имеют, кроме того, общий мнимый круг и что он дополняет первый конечный круг до той пространственной кривой четвертого порядка, каковой должна быть линия пересечения согласно нашей общей теореме.

В дополнение к этому я хотел бы еще сказать несколько слов о так называемом мнимом преобразовании. Под этим названием понимают коллинеации с мнимыми коэфициентами, которые преимущественно интересующие нас мнимые точки переводят в действительные точки. Так, здесь в теории циклических точек применяют с большой пользой преобразование:

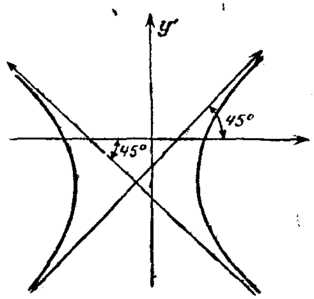

Рис. 90.

$$\xi' = \xi, \quad \eta' = i\eta, \quad \tau' = \tau,$$

ибо оно переводит уравнение $\xi^2 + \eta^2 = 0$ в уравнение $\xi'^2 - \eta'^2 = 0$, а потому циклические точки $\xi' : \eta' = \pm i$, $\tau = 0$ превращаются в действительные бесконечно удаленные точки:

$$\xi' : \eta' = \pm 1, \quad \tau = 0;$$

это — бесконечно удаленные точки обоих направлений, наклоненных к осям под углами в 45°. Все круги переходят, следовательно, в конические сечения, проходящие через обе эти вещественные бесконечно удаленные точки, а это просто — всевозможные равносторонние гиперболы, асимптоты которых образуют с осями упомянутые углы в $\pm 45°$ (рис. 90). Пользуясь образом этих гипербол, можно себе наглядно уяснить все теоремы о кругах, что является чрезвычайно удобным и полезным для многих целей, в особенности также и для аналогичных рассуждений в пространстве. В рамках этого курса мне приходится, однако, ограничиться сделанными замечаниями; более подробное развитие этих идей дают, обыкновенно, в курсах и книгах по „проективной геометрии“.

Возникает вопрос, нельзя ли подойти к этим мнимым точкам, плоскостям, коническим сечениям и т. д. также с чисто геометрической точки зрения, не исторгая их насильно — как это мы делали до сих пор — из формул анализа. Более старые геометры — ни Понселе, ни также Штейнер — не достигли в этом отношении еще ясности; для Штейнера мнимые величины в геометрии все еще являются „привидениями" (Gespenster), которые, находясь как бы в высшем мире, обнаруживают себя своими действиями, но о сущности которых мы не можем получить ясного представления. Впервые Штаудт (v. Staudt) в своих уже названных раньше сочинениях „Геометрия положения"[1] и „Добавления к геометрии"[2] полностью разрешил этот вопрос, и его идеями нам следует еще немного заняться. Впрочем, эти книги Штаудта читаются очень трудно, ибо он развивает свои теории дедуктивным путем сразу в их окончательной форме, не ссылаясь на аналитические формулы и не делая индуктивных указаний.

Удобным же для понимания является всегда лишь генетическое изложение, которое следует пути, пройденному предположительно автором при возникновении его идей.

Двум работам Штаудта соответствуют две различные стадии в развитии его теории, к краткому изложению которых я теперь перейду. В работе 1846 г. речь сперва идет только о произвольных образах второго порядка с вещественными коэфициентами, я говорю „образах", так как не хочу фиксировать числа их измерений (прямая, плоскость или пространство). Рассмотрим, например, кривую второго порядка на плоскости, т. е. какое-нибудь квадратное уравнение с вещественными коэфициентами однородное относительно трех переменных:

$$A\xi^2 + 2B\xi\eta + C\eta^2 + 2D\xi\tau + 2E\eta\tau + F\tau^2 = 0.$$

Для аналитического исследования является в таком случае совершенно безразличным, имеет ли вообще это уравнение вещественные решения или нет, т. е. имеет ли кривая второго порядка действительную ветвь, или же состоит из одних только мнимых точек. Вопрос заключается в том, какие именно наглядные представления чис-

[1] Nürnberg 1846.

[2] Nürnberg 1856—1860.

тый геометр должен связывать с подобной кривой в этом последнем случае, как он должен определить такую кривую геометрическими средствами. Тот же вопрос возникает и в одномерной области, когда речь идет о пересечении кривой с какой-нибудь прямой, например с x-осью: $\eta=0$; тогда точки пересечения — безразлично, будут ли они вещественными или мнимыми — получаются из уравнения с вещественными коэфициентами:

$$A\xi^2+2D\xi\tau+F\tau^2=0,$$

и вопрос в том, можно ли со случаем комплексных корней связать какое-нибудь геометрическое содержание.

Идея Штаудта заключается прежде всего в следующем. Он рассматривает вместо кривой второго порядка соответствующую ей полярную систему, о которой мы уже выше (стр. 185) говорили, т. е. взаимно двойственное соответствие, изображаемое уравнением:

$$A\xi\xi'+B(\xi\eta'+\xi'\eta)+C\eta\eta'+D(\xi\tau'+\xi'\tau)+$$
$$+E(\eta\tau'+\eta'\tau)+F\tau\tau'=0.$$

В силу вещественности коэфициентов это исключительно вещественное соотношение, относящее каждой действительной точке некоторую действительную прямую, независимо от того, будет ли кривая действительна или нет. Но полярная система со своей стороны вполне определяет кривую, как совокупность точек, лежащих на своих собственных полярах, причем каждый раз остается открытым вопрос о том, существуют ли такие точки в вещественной области. Но во всяком случае полярная система всегда является вещественным представителем определяемой уравнением кривой второго порядка, и оказывается целесообразным поставить этого представителя во главу исследования вместо заданной нам кривой.

Пересекая нашу кривую x-осью, т. е. полагая η и η' равными нулю, совершенно аналогично получаем на этой оси некоторое одномерное всегда вещественное полярное соответствие, которое изображается уравнением:

$$A\xi\xi'+D(\xi\tau'+\xi'\tau)+F\tau\tau'=0,$$

и всегда приводит во взаимное соответствие по две вещественные точки. Точками пересечения x-оси с кривой являются обе точки, соответствующие каждая самой себе в этом полярном соответствии, его так называемые основные точки (Grund или Ordnungspunkte).

Они могут быть вещественными или мнимыми, но во всяком случае вопрос о них представляет лишь второстепенный интерес, а на первый план выдвигается опять-таки полярное соответствие, как всегда, вещественный представитель этих точек.

Каждые две точки $\left(\frac{\xi}{\tau}, \frac{\xi'}{\tau'}\right)$, взаимно сопряженные в подобном одномерном полярном соответствии, называют парой точек „инволюции"— выражение, введенное в XVII в. Дезаргом (Desargues); при этом различают два главных типа таких инволюций в соответствии с тем, являются ли основные точки вещественными или мнимыми, и промежуточный случай, в котором они совпадают. Но для нас здесь главным является само понятие инволюции; различение же отдельных случаев, т. е. вопрос о природе корней квадратного уравнения, имеет лишь второстепенный интерес.

Хотя эти рассуждения, которые могут быть, конечно, непосредственно перенесены на три измерения, и не дают еще толкования мнимых элементов, но зато — что касается образов второго порядка — установлена общая точка зрения, стоящая выше разделения на вещественные и мнимые элементы. Каждый образ второго порядка изображается некоторой вещественной полярной системой, и с этими полярными системами можно оперировать геометрически точно так же, как аналитически — с вещественными уравнениями этих образов.

Поясним это на примере.

Пусть дана некоторая кривая второго порядка, т. е. в силу предыдущего некоторая полярная система на плоскости; присоединим к ней еще одну какую-нибудь прямую. Здесь непосредственная интуиция подсказывает нам возможность очень многих различных случаев в зависимости от того, имеет ли вообще кривая вещественные точки или нет и пересекается ли она в первом случае с прямою в вещественных точках или нет. Но во всяком случае наша плоская полярная система определяет на прямой g (рис. 91) некоторую линейную полярную систему, т. е. некоторую инволюцию: каждой точке P прямой g соответствует поляра p', а эта последняя пересекается с g в некоторой точке P'; точки (P, P') и пробегают ту инволюцию, о которой идет речь. Дополнительно можно поставить вопрос об основных точках этой инволюции, о том, будут ли они вещественными или мнимыми. Этим мы выразили в геометрических терминах как раз то, к чему мы пришли в начале наших разъяснений, исходя из уравнений.

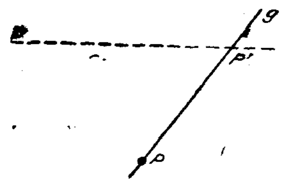

Рис. 91.

Применим теперь эти рассуждения, в частности, к мнимым циклическим точкам и к кругу сфер. Выше мы сказали, что два произвольных круга пересекают бесконечно удаленную прямую в одних и тех же двух точках, а именно в циклических точках; геометрически это будет теперь означать, что полярные системы этих кругов образуют на бесконечно удаленной прямой одну и ту же одномерную полярную систему, т. е. приводят к одной и той же инволюции. В самом деле, если приведем (ср. стр. 101) касательные к какому-нибудь кругу из бесконечно удаленной точки P, то поляра p_1' этой последней, будучи линией соединения точек касания касательных, исходящих из P, оказывается перпендикулярной к их общему направлению (рис. 92). А так как все прямые, проходящие через одну и ту же бесконечно удаленную точку, параллельны между собой, то и поляра p_2' той же точки P, взятая по отношению к какому-нибудь другому кругу, будет перпендикулярна к тому же самому направлению, что

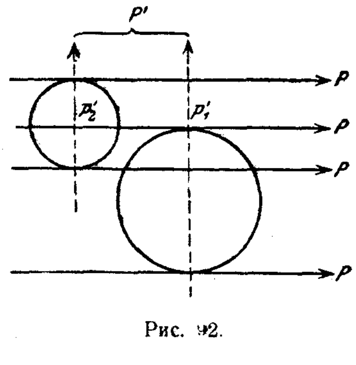

Рис. 92.

и p_1', а значит, — параллельна прямой p_1'; другими словами, p_1' и p_2' в свою очередь пересекают бесконечно удаленную прямую в одной и той же точке P'. Итак, полярные системы всех кругов образуют в пересечении с бесконечно удаленною прямою — таков наш результат — одну и ту же полярную систему, так называемую „абсолютную инволюцию", причем точки каждой пары этой последней, рассматриваемые из любой конечной точки, всякий раз видны в двух взаимно перпендикулярных направлениях.

Переведем эти рассуждения на язык анализа. Исходя из однородного уравнения круга:

$$(\xi - a\tau)^2 + (\eta - b\tau)^2 - r^2\tau^2 = 0,$$

или

$$\xi^2 + \eta^2 - 2a\xi\tau - 2b\eta\tau + (a^2 + b^2 - r^2)\tau^2 = 0,$$

получаем соответствующее полярное соответствие:

$$\xi\xi' + \eta\eta' - a(\xi\tau' + \xi'\tau) - b(\eta\tau' + \eta'\tau) + (a^2 + b^2 - r^2)\tau\tau' = 0;$$

отсюда мы получим соответствие, устанавливаемое на бесконечно удаленной прямой, если примем $\tau = \tau' = 0$:

$$\xi\xi' + \eta\eta' = 0, \quad \tau = 0, \quad \tau' = 0.$$

Эти уравнения действительно не зависят от констант a, b, r, характеризующих исходный круг. К тому же, как учит аналитическая геометрия, две прямые, идущие к точкам ξ, η, 0 и ξ', η', 0, оказываются в силу первого из этих уравнений взаимно перпендикулярными, так что мы действительно снова приходим к высказанной выше теореме.

Совершенно аналогичные соотношения имеют место для шаров в пространстве. Все они создают на бесконечно удаленной плоскости одно и то же, так называемое абсолютное полярное соответствие, задаваемое уравнениями:

$$\xi\xi' + \eta\eta' + \zeta\zeta' = 0, \quad \tau = 0, \quad \tau' = 0;$$

а так как из первого из этих уравнений следует, что направления $\xi:\eta:\zeta$ и $\xi':\eta':\zeta'$ взаимно перпендикулярны, то каждой бесконечно удаленной точке P соответствует при этом та бесконечно удаленная прямая, которая засекается (на бесконечно удаленной плоскости) плоскостью, перпендикулярной к идущему к P направлению. Это дает нам вещественный геометрический эквивалент теорем о мнимом круге в бесконечности.

Можно, конечно, сказать, что эти рассуждения представляют скорее обход мнимого в геометрии, чем его истолкование. Действительную же интерпретацию отдельных мнимых точек, прямых и плоскостей Штаудт дал впервые лишь в своих „Добавлениях" („Bulträge") 1856—1860 гг. путем дальнейшего развития изложенного выше подхода. Я хочу разъяснить вам и эту интерпретацию, так как она по сути является чрезвычайно простой и остроумной и только в абстрактном изложении Штаудта кажется крайне странной и трудной. При этом я во всем буду следовать тому ее аналитическому изложению, какое дал Штольц (Stolz) в 1871 г. [1]). Штольц, бывший тогда со мною вместе в Гёттингене, прочитал всего Штаудта, чего я сам никогда не мог выполнить. Из бесед со Штольцем я и познакомился с различными, очень интересными также и в других отношениях идеями Штаудта, над которыми я впоследствии много раз сам работал. В нижеследующем я снова остановлюсь только на важнейших чертах хода идей Штаудта, не приводя полностью всех деталей; при этом будет совершенно достаточно ограничиться случаем плоскости.

Начнем с предположения, что нам задана некая мнимая точка P своими тремя комплексными координатами ξ, η, τ, разлагая их на вещественную и мнимую части, пишем;

$$\xi = \xi_1 + i\xi_2, \quad \eta = \eta_1 + i\eta_2, \quad \tau = \tau_1 + i\tau_2. \qquad (1)$$

Зададимся целью построить некую вещественную фигуру, которая дав ла бы истолкование этой точке P причем связь этих двух образов должна быть проективной, т. е., выражаясь точнее, не должна нарушаться ни прикаком вещественном проективном преобразовании.

[1]) „Die geometrische Bed utung der komplexen Elemente in der analytischen Geom trie" („Геометрическое значение мнимых элементов в аналитической геометрии"), „Mathematische Annalen", Bd. 4, S. 416; 1871.

Первый шаг в указанном направлении заключается в том, что мы:

1) фиксируем внимание на тех двух вещественных точках P_1, P_2, однородными координатами которых служат вещественные и соответственно умноженные на $-i$ мнимые части (что дает коэфициенты при i) заданных координат точки P:

$$P_1: \xi_1, \eta_1, \tau_1; \qquad P_2: \xi_2, \eta_2, \tau_2. \tag{1a}$$

Эти две точки различны, т. е. не имеют места равенства $\xi_1 : \eta_1 : \tau_1 = \xi_2 : \eta_2 : \tau_2$, ибо в противном случае ξ, η, τ относились бы между собой как три вещественные величины и изображали бы поэтому вещественную точку. Поэтому точки P_1, P_2 определяют некоторую вещественную прямую g, уравнение которой имеет, как известно, вид:

$$\begin{vmatrix} \xi & \eta & \tau \\ \xi_1 & \eta_1 & \tau_1 \\ \xi_2 & \eta_2 & \tau_2 \end{vmatrix} = 0; \tag{2}$$

на этой прямой лежит как заданная мнимая точка P, так и ее „комплексно-сопряженная точка“ $\bar{P}$ с координатами:

$$\bar{\xi} = \xi_1 - i\xi_2, \quad \bar{\eta} = \eta_1 - i\eta_2, \quad \bar{\tau} = \tau_1 - i\tau_2, \tag{$\overline{1}$}$$

так как обе тройки координат (1), $(\overline{1})$ удовлетворяют, очевидно, уравнению прямой (2).

2) Конечно, построенная таким образом пара точек P_1, P_2 ни в коем случае не может служить вещественным представителем мнимой точки P, ибо она весьма существенным образом зависит от самих отдельных значений ξ, η, τ, *тогда как точка P характеризуется* только отношениями этих чисел. Следовательно, получится та же самая точка P, если мы вместо ξ, η, τ напишем их произведения:

$$\begin{aligned} \rho\xi &= \rho_1\xi_1 - \rho_2\xi_2 + i(\rho_2\xi_1 + \rho_1\xi_2), \\ \rho\eta &= \rho_1\eta_1 - \rho_2\eta_2 + i(\rho_2\eta_1 + \rho_1\eta_2), \\ \rho\tau &= \rho_1\tau_1 - \rho_2\tau_2 + i(\rho_2\tau_1 + \rho_1\tau_2) \end{aligned} \tag{3}$$

на произвольную комплексную константу:

$$\rho = \rho_1 + i\rho_2;$$

но тогда, разделяя вновь вещественную и мнимую части, мы получим вместо точек P_1 и P_2 уже другие вещественные точки P_1' и P_2' с координатами:

$$\left.\begin{aligned} P_1' : \xi_1' : \eta_1' : \tau_1' &= \rho_1\xi_1 - \rho_2\xi_2 : \rho_1\eta_1 - \rho_2\eta_2 : \rho_1\tau_1 - \rho_2\tau_2, \\ P_2' : \xi_2' : \eta_2' : \tau_2' &= \rho_2\xi_1 + \rho_1\xi_2 : \rho_2\eta_1 + \rho_1\eta_2 : \rho_2\tau_1 + \rho_1\tau_2. \end{aligned}\right\} \qquad (3a)$$

Рассматривая совокупность всех пар точек P_1', P_2', получаемых таким образом при всевозможных значениях ρ_1, ρ_2, мы приходим к некоторому геометрическому образу, для которого имеют значение только отношения $\xi : \eta : \tau$, т. е. только „геометрическая" точка P, и который поэтому вполне годится быть представителем для P. Кроме того, связь этого образа с P является действительно проективной, ибо при любом линейном вещественном преобразовании величин ξ, η, τ их компоненты ξ_1, η_1, τ_1 и ξ_2, η_2, τ_2 подвергаются, очевидно, тому же преобразованию.

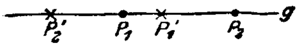

Рис. 93.

3) Чтобы теперь исследовать ближе геометрическую природу этой совокупности точечных пар, заметим прежде всего, что, каково бы ни было ρ, точки P_1', P_2' всякий раз лежат на прямой $P_1 P_2$ (рис. 93), ибо их координаты удовлетворяют, очевидно, уравнению (2). Далее, когда ρ пробегает всевозможные комплексные значения, т. е. когда ρ_1 и ρ_2 принимают всевозможные вещественные значения (причем их общий вещественный множитель не имеет существенного значения), то P_1' пробегает по всем вещественным точкам прямой g, а P_2' всегда представляет собой какую-то другую вещественную точку той же прямой g, однозначно сопряженную с первой; в частности, при $\rho_1 = 1$, $\rho_2 = 0$ получаются в качестве сопряженных точек точки P_1 и P_2. Это сопряжение сделается более наглядным, если ввести отношение:

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = -\lambda;$$

а именно, тогда будем мы иметь:

$$\left.\begin{aligned} &\text{для } P_1'\colon \xi_1'\colon \eta_1'\colon \tau_1' = \xi_1 + \lambda\xi_2 \colon \eta_1 + \lambda\eta_2 \colon \tau_1 + \lambda\tau_2; \\ &\text{для } P_2'\colon \xi_2'\colon \eta_2'\colon \tau_2' = \xi_1 - \frac{1}{\lambda}\xi_2 \colon \eta_1 - \frac{1}{\lambda}\eta_2 \colon \tau_1 - \frac{1}{\lambda}\tau_2 \end{aligned}\right\} \quad (3b)$$

4) Из этих формул можно далее легко заключить, что при переменном λ точки P_1 и P_2 как раз пробегают по всем парам точек некоторой инволюции на прямой g. Ибо при введении на прямой g системы координат одного измерения однородные координаты каждой точки P_1' или соответственно P_2' оказываются, как известно, целыми линейными функциями параметра $\lambda_1 = \lambda$ или соответственно $\lambda_2' = -\frac{1}{\lambda}$ уравнений (3b). Поэтому уравнение $\lambda_1' \cdot \lambda_2' = -1$, связывающее между собой оба эти параметра, устанавливает некоторое симметрическое билинеарное соотношение между линейными координатами точек P_1' и P_2', а этим в силу определения на стр. 205 и доказывается наше утверждение.

5) Основные точки, т. е. соответствующие самим себе точки этой инволюции, получаем при $\lambda = -\frac{1}{\lambda}$, следовательно, при $\lambda = \pm i$; обе они оказываются мнимыми, а именно, одна из них совпадает с нашей исходной точкой P, а вторая является комплексно-сопряженной с ней точкой $\bar{P}$. Пока что мы пришли, таким образом, всего лишь к новому изложению старых штаудтовых идей. Наряду с точкой P мы ввели в рассмотрение точку $\bar{P}$, которая дополняет точку P до некоторого одномерного образа второго порядка, определяемого некоторым вещественным квадратным уравнением, и построили в качестве вещественного представителя этого образа соответственную инволюцию. Замечу еще, что такая инволюция будет вполне определена, если известны две какие-нибудь пары ее точек, например P_1, P_2 и P_1', P_2'; для того же, чтобы основные точки этой инволюции были мнимыми, необходимо и достаточно, чтобы эти пары точек находились в „скрещенном положении“, т. е. чтобы одна из точек P_1' P_2' находилась между P_1 и P_2, а вторая вне отрезка P_1 P_2.

6) Для полного решения нашей настоящей задачи нам нехватает теперь еще только средства, позволяющего превратить этого общего представителя двух точек P и $\bar{P}$ в представителя одной только точки P (или только точки $\bar{P}$); Штаудт нашел такое средство лишь в 1856 г., пользуясь одной очень красивой идеей. А именно, точка P_1' с координатами

$$\xi_1 + \lambda\xi_2 : \eta_1 + \lambda\eta_2 : \tau_1 + \lambda\tau_2$$

пробегает прямую g в одном, вполне определенном направлении (или „в определенную сторону") (рис. 94), если заставить λ пробежать от нуля по всем вещественным положительным значениям до $+\infty$ и затем через все отрицательные

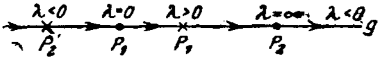

Рис. 94.

значения опять вернуться к нулю. Легко убедиться в том что мы получили бы ту же самую сторону (Sinn) направления на g, если бы исходили из координат точки P, умноженных на произвольный множитель ρ, т. е. если бы рассматривали точку $\xi_1' + \lambda\xi_2', \ldots$, и что, далее, при вещественном проективном преобразовании точки P направление движения (Pfeilrichtung) точки-изображения получается из только что определенного направления путем того же преобразования. Поэтому будет вполне согласным с нашими требованиями, если мы раз навсегда условимся сопрягать это направление движения с первоначальной точкой P, имеющей координаты $\xi_1 + i\xi_2, \ldots$ А так как комплексно-сопряженная точка $\bar{P}$ имеет координаты $\xi_1 + i(-\xi_2), \ldots$, то с нею согласно этому условию приходится сопрягать то направление движения, какое имеет точка с координатами $\xi_1 + \lambda(-\xi), \ldots$ при положительно возрастающем λ (от нуля через положительные значения к $+\infty$ и затем от $-\infty$ до нуля, т. е. сторону направления (Sinn) на прямой g, как раз прямо противоположную предыдущей стороне, и этим достигается желательное различение. Выражаясь кратко, мы попросту вводим различение между $+i$ и $-i$ тем, что мы различаем положительный и отрицательный пробег (Durchlaufung) вещественных λ-значений. Вместе с тем мы получили, в конце концов, следующее правило для однозначного и проективно-инвариантного построения вещественной геометрической фигуры, представляющей мнимую точку

$$\xi_1 + i\xi_2 : \eta_1 + i\eta_2 : \tau_1 + i\tau_2.$$

Строим точки $P_1(\xi_1 : \eta_1 : \tau_1)$ и $P_2(\xi_2 : \eta_2 : \tau_2)$, соединяющую их прямую g и ту инволюцию точек на прямой g (или соответственно еще одну пару ее точек), в которой точки

$$P_1'(\xi_1 + \lambda\xi_2 : \eta_1 + \lambda\eta_2 : \tau_1 + \lambda\tau_2)$$

и

$$P_2'(\xi_1 - \frac{1}{\lambda}\xi_2 : \eta_1 - \frac{1}{\lambda}\eta_2 : \tau_1 - \frac{1}{\lambda}\tau_2)$$

всегда являются попарно сопряженными; наконец, присоединяем еще стрелку, указывающую направление движения точки P_1' при положительно возрастающем λ.

7) Нам осталось еще убедиться в том, что также и обратно, каждая такая вещественная фигура, состоящая из прямой, из двух лежащих на ней в скрещенном положении пар точек P_1, P_2 и P_1', P_2' (или соответственно из точечной инволюции без вещественных двойных точек) и из стрелки, указывающей направление, представляет (репрезентирует) одну и только одну мнимую точку. В самом деле, присоединяя некоторый надлежаще выбранный вещественный постоянный множитель, можно без труда — я опять-таки разрешаю себе не вдаваться здесь в подробности — придать координатам точки P_2 такие значения ξ_2, η_2, τ_2, чтобы координаты точек P_1' и P_2' находились в отношениях

$$\xi_1 + \lambda\xi_2 : \eta_1 + \lambda\eta_2 : \tau + \lambda\tau_2$$

и

$$\xi_1 - \frac{1}{\lambda}\xi_2 : \eta_1 - \frac{1}{\lambda}\eta_2 : \tau_1 - \frac{1}{\lambda}\tau_2$$

или, что все равно, чтобы двойные точки заданной инволюции имели координаты $\xi_1 \pm i\xi_2, \ldots$; знаком же параметра λ, который после этого еще остается произвольным, распоряжаются так, чтобы направление движения точки $\xi_1+\lambda\xi_2:\eta_1+\lambda\eta_2:\tau_1+\lambda\tau_2$ при положительно растущем, начиная от нуля, параметре λ соответствовало направлению, заданному стрелкой. Тогда точке P с координатами $\xi_1+i\xi_2$ будет действительно соответствовать в силу предыдущих рассуждений как раз заданная инволюция с заданным направлением движения, в качестве ее вещественного представителя.

Далее, можно убедиться в том, что, исходя из какой-нибудь другой пары точек этой инволюции, мы придем к таким же самым отношениям координат, т. е. к той же точке P.

Решив таким образом нашу проблему для точки, мы можем (оставаясь на плоскости) сразу же перенести это решение и на случай прямой, пользуясь принципом двойственности. В результате для комплексной прямой ее однозначным представителем в вещественной области является вещественная точка, две пары лучей, принадлежащие пучку лучей с центром в этой точке и разделяющие одна другую (или соответственно некоторая инволюция лучей без вещественных двойных лучей) и, наконец, определенное направление вращения в этом пучке (рис. 95).

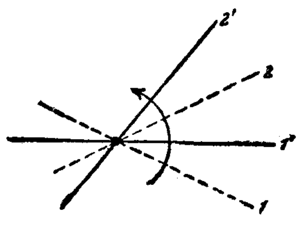

Рис. 95.

Эти интерпретации позволяют также — и в этом заключается их громадное значение — представлять все соотношения между комплексными элементами или между комплексными и вещественными элементами при помощи наглядных свойств исключительно вещественных геометрических фигур.

Чтобы пояснить это на конкретном примере, покажу вам, что соответствует в этой интерпретации утверждению: (вещественная или мнимая) точка P лежит на (вещественной или мнимой) прямой g. При этом, конечно, приходится различать такие случаи:

1) вещественная точка и вещественная прямая;

2) вещественная точка и мнимая прямая;

3) мнимая точка и вещественная прямая;

4) мнимая точка и мнимая прямая.

Случай 1) не требует от нас особых разъяснений; здесь перед нами одно из основных соотношений обычной геометрии.

В случае 2) через заданную вещественную точку обязательно должна приходить наряду с заданной мнимой прямой также и комплексно-сопряженная с нею прямая, следовательно, эта точка должна совпадать с вершиной того пучка лучей, которым мы пользуемся для изображения мнимой прямой.

Подобно этому в случае 3) вещественная прямая должна быть тождественна с носителем той прямолинейной инволюции точек, которая служит представителем заданной мнимой точки.

Наиболее интересным является случай 4) (рис. 96): здесь, очевидно, комплексно-сопряженная точка должна также лежать на комплексно-сопряженной прямой, а отсюда следует, что каждая пара точек инволюции точек, изображающей точку P, должна находиться на некоторой паре лучей инволюции прямых, изображающей прямую g, т. е. что обе эти репрезентирующие инволюции должны быть расположены перспективно одна относительно другой; кроме того, оказывается, что и стрелки обеих инволюций также расположены перспективно.

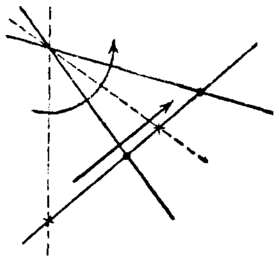

Рис. 96.

Вообще в аналитической геометрии плоскости, уделяющей внимание также и комплексной области, мы получим полную вещественную картину этой плоскости, если к совокупности всех ее вещественных точек и прямых присоединим в качестве новых элементов совокупность рассмотренных выше инволюционных фигур вместе со стрелками их направлений. Здесь будет достаточно, если я намечу в общих очертаниях, какой вид приняло бы при этом построение такой вещественной картины комплексной геометрии. При этом я буду следовать тому порядку, в каком теперь обычно излагают первые предложения элементарной геометрии. А именно там начинают

1) с аксиом существования (Existenzsätze), назначение которых — дать точную формулировку наличия только что упомянутых элементов в расширенной, по сравнению с обычной геометрией, области.

2) Затем аксиомы сочетания (Sätze der Verknüpung), которые утверждают, что также и в определенной в рубрике 1 расширенной области через (каждые) две точки проходит одна и только одна прямая и что (всякие) две прямые имеют одну и только одну общую точку. При этом, подобно тому, что мы имели выше, приходится каждый раз различать четыре случая в зависимости от вещественности заданных элементов, и является очень интересным точно продумать, какие именно вещественные построения с инволюциями точек и прямых служат изображением этих комплексных соотношений.

3) Что же касается аксиом (законов) расположения (Gesetze der Anordnung), то здесь по сравнению с вещественными соотношениями выступают на сцену совершенно новые обстоятельства; в частности, все вещественные

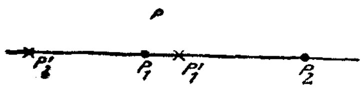

Рис. 97.

и комплексные точки, лежащие на одной фиксированной прямой, а также все лучи, проходящие через одну фиксированную точку, образуют двумерный континуум. Ведь каждый из нас вынес также из изучения теории функций привычку изображать совокупность всех значений комплексной переменной всеми точками плоскости.

4) Наконец, что касается аксиом непрерывности (Sätze der Stetigkeit), то я укажу здесь только, как изображаются комплексные точки, лежащие как угодно близко к какой-нибудь вещественной точке. Для этого через взятую вещественную точку P (или через какую-нибудь другую близкую к ней вещественную точку) нужно провести какую-нибудь прямую и рассмотреть на ней такие

две разделяющие одна другую (т. е. лежащие „скрещенным образом") пары точек (рис. 97), чтобы две точки P_1, P_1', взятые из разных пар, лежали близко одна к другой и к точке P; если теперь неограниченно сближать точки P_1 и P_1', то инволюция, определяемая названными парами точек, вырождается, т. е. обе ее, до сих пор комплексные, двойные точки совпадают с точкой $P_1 = P_1'$. Каждая из обеих мнимых точек, изображаемых этой инволюцией (вместе с той или другой стрелкой) переходит, следовательно, непрерывно в некоторую точку, близкую к точке P или даже прямо в точку P. Конечно, для того чтобы быть в состоянии с пользой применять эти представления о непрерывности, необходимо сперва специально в них вработаться.

Если все это построение и является, по сравнению с обычной вещественной геометрией, порядком громоздким и утомительным, зато оно может дать несравненно больше. В частности, оно способно поднять на уровень полной геометрической наглядности алгебраические образы, как совокупности их вещественных и комплексных элементов, и при помощи его можно наглядно уяснить себе на самих фигурах такие теоремы, как основная теорема алгебры или как теорема Безу (Bezout) о том, что две кривые m-го и n-го порядков имеют, вообще говоря, ровно $m \cdot n$ общих точек. Для этой цели следовало бы, конечно, обработать основные положения в значительно более точной и наглядной форме, чем это было сделано до сих пор; впрочем, в литературе уже имеется весь существенно необходимый для таких исследований материал.

Но в большинстве случаев применение этого геометрического толкования привело бы все же при всех его теоретических преимуществах к таким усложнениям, что приходится довольствоваться его принципиальной возможностью и возвращаться фактически к такой более наивной точке зрения: комплексная точка есть совокупность трех комплексных координат, и с нею можно оперировать известным образом точно так же, как и с вещественными точками. В действительности такое введение мнимых элементов воздерживающееся от каких бы то ни было принципиальных рассуждений, всегда оказывалось плодотворным в тех случаях, когда приходилось иметь дело с мнимыми циклическими точками или с кругом сфер. Как уже было сказано, впервые стал пользоваться мнимыми элементами в этом смысле Понселе; его последователями в этом отношении были другие французские геометры, главным образом Шаль (Chasles) и Дарбу (Darboux); в Германии же, в особенности Ли, применяли с большим успехом такое понимание мнимых элементов.

Этим отступлением в область мнимого я заканчиваю весь второй отдел моего курса и обращаюсь к новой главе.

СИСТЕМАТИКА И ОБОСНОВАНИЕ ГЕОМЕТРИИ

I. СИСТЕМАТИКА

Изученные нами геометрические преобразования мы прежде всего используем для установления систематического подразделения всей области геометрии, которое позволит нам обозреть с одной точки зрения как отдельные части геометрии, так и их взаимные связи.

1. Обзор классификации геометрических дисциплин

Здесь речь идет о тех идеях, которые я систематически развил в моей „Эрлангенской программе“ [1]) 1872 г.; сведения о дальнейшем развитии этих идей с того времени вы найдете в „Энциклопедии математических наук“ в статье Дж. Фано „Теория групп как геометрический принцип классификации“ (G. Fano, Die Gruppentheorie als geometrisches Einteilungsprinzip, Enz. III, A. B. 4b).

1) В дальнейшем, как и до сих пор, мы будем систематически пользоваться анализом при исследовании геометрических отношений, представляя себе совокупность всех точек пространства изображенною при помощи совокупности всех число-

---

[1]) „Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen“, Erlangen 1872. Перепечатано в „Mathematische Annalen“ (Bd. 43, S. 63 ff., 1893) и в „Собрании математических работ“ Клейна (F. Klein Gesammelte Mathematische Abhandlungen, Bd. I, S. 460 ff, Berlin, Springer, 1921). [Русский перевод проф. Д. М. Синцова помещен в „Известиях Физико-математического о-ва при Казанском университете“ (вторая серия, 5-й т., 1896 г.) под названием: „Сравнительное обозрение новейших геометрических исследований“.]

вых троек-значений трех „координат" x, y, z. При таком изображении каждому преобразованию пространства соответствует определенное преобразование этих координат. С самого начала наших занятий наше внимание особенно привлекли следующие четыре вида преобразований, изображаемых некоторыми специальными линейными подстановками координат x, y, z: параллельные сдвиги, вращения около начала координат O, зеркальные отражения относительно этой же точки O, и преобразования подобия с центром подобия O.

2) Введение координат могло бы, пожалуй, заставить думать о существовании полного тождества между анализом трех независимых переменных x, y, z и геометрией в узком смысле слова. Но в действительности это не так. Дело в том, что геометрия занимается, как это я уже раньше имел случай отметить (см. стр. 51 и сл.), только такими соотношениями между координатами, которые остаются без изменений при перечисленных в рубрике 1) линейных подстановках, — будем ли рассматривать последние как изменения системы координат или как преобразования пространства; геометрия является, таким образом, теорией инвариантов упомянутых линейных субституций. Все же, не имеющие инвариантного характера уравнения между координатами — как, например, то утверждение, что некоторая точка имеет координаты 2, 5, 3, — связаны с определенной, раз навсегда фиксированной системой координат, и принадлежат к науке, которая должна индивидуализировать каждую точку саму по себе и рассматривать изолированно ее свойства: к топографии или, если угодно, к географии. Для пояснения я напомню несколько примеров геометрических свойств: две точки имеют определенное (взаимное) расстояние, если только фиксирована некоторая единица (длины); с нашей теперешней точки зрения это означает, что с помощью их координат $x_1\ y_1\ z_1,\ x_2\ y_2\ z_2$ можно составить некоторое выражение $\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2}$, которое остается неизменным при всех тех подстановках, либо только умножается на некоторый множитель, независящий от специального положения взятых точек. Подобное же значе-

ние имеют фразы: „две прямые образуют определенный угол“, „некоторое коническое сечение имеет определенные главные оси и фокусы“ и т. д.

Совокупность этих геометрических свойств мы будем обозначать названием „метрическая геометрия“, чтобы сразу же отличить от нее различные другие „виды геометрий“. Мы получим их, выделяя по определенному принципу известные группы теорем метрической геометрии и рассматривая их сами по себе; вследствие этого все эти новые виды геометрии являются, по крайней мере на первый взгляд, частями метрической геометрии, как наиболее объемлющего „вида геометрии“.

3) За исходный пункт мы берем подробно изученные раньше аффинные преобразования, т. е. целые линейные подстановки x, y, z:

$$\begin{cases} x' = a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1, \\ y' = a_2 x + b_2 y + c_2 z + d_2, \\ z' = a_3 x + b_3 y + c_3 z + d_3, \end{cases}$$

в число которых входят преобразования, рассмотренные в рубрике 1 как частные случаи, и выделяем из числа всех геометрических понятий и теорем более узкий круг тех, которые остаются неизменными при любых аффинных преобразованиях; совокупность их мы рассматриваем как первый новый вид геометрии — как так называемую аффинную геометрию, или теорию инвариантов аффинных преобразований.

Поэтому мы можем из нашего знания аффинных преобразований тотчас же вывести понятия и теоремы этой геометрии; я упомяну здесь лишь немногое: о расстояниях и углах в аффинной геометрии не может быть более и речи, точно так же теряет смысл понятие главных осей конического сечения и исчезает различие между окружностью и эллипсом. Но зато сохраняется различение в пространстве конечного и бесконечно далекого и вообще все, что связано с этим различением: понятие параллелизма двух прямых, подразделение всех конических сечений на эллипсы, гиперболы, параболы и т. п., далее понятия о центре и диаметрах конического сечения и, в частности, соотношение сопряженных диаметров.

4) Далее, обращаемся к проективным, т. е. к дробно-линейным, преобразованиям:

$$x' = (a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1) : (a_4 x + b_4 y + c_4 z + d_4),$$
$$y' = (a_2 x + b_2 y + c_2 z + d_2) : (a_4 x + b_4 y + c_4 z + d_4),$$
$$z' = (a_3 x + b_3 y + c_3 z + d_3) : (a_4 x + b_4 y + c_4 z + d_4),$$

которые включают аффинные преобразования как частные случаи. Если известные геометрические свойства остаются без изменения при всех этих преобразованиях, то они должны, конечно, принадлежать также и к аффинной геометрии; этим из последней выделяется так называемая проективная геометрия как теория инвариантов проективных преобразований. Последовательное выделение аффинной и проективной геометрии из метрической можно сравнить с работой химика, который, применяя все более и более сильные средства разложения, выделяет из данного вещества все более ценные составные части; нашими средствами разложения являются сперва аффинные, а затем проективные преобразования.

Что же касается теорем проективной геометрии, то отметим лишь, что теперь отпадает исключительное положение бесконечного и все связанные с этим понятия аффинной геометрии. Теперь имеется только один вид собственного конического сечения; зато сохраняется, например, связь между полюсом и полярою и точно так же образование конического сечения проективными пучками лучей, о котором мы говорили выше (стр. 163 и сл.).

Следуя тому же принципу, мы можем подняться от метрической геометрии также и к другим видам геометрий: одной из важнейших является

5) геометрия обратных радиусов. Она охватывает совокупность тех свойств метрической геометрии, которые сохраняются при всех возможных преобразованиях при помощи обратных радиусов (стр. 166); таким образом в этой геометрии, например, понятие прямой или плоскости теряет всякое самостоятельное значение, но зато сохраняют смысл понятия окружности и шара, по отношению к которым

понятия прямой и плоскости занимают подчиненное положение в качестве частных случаев.

6) Наконец, я выделяю еще один вид геометрии, который получается как бы путем применения самой сильной програвы и охватывает поэтому наименьшее количество теорем. Это — Analysis situs (топология), о котором я уже упоминал (стр. 177 и сл.). Здесь речь идет о совокупности тех свойств, которые сохраняются при всех взаимнооднозначных, лишь бы только всюду непрерывных преобразованиях. А чтобы не предоставлять всему бесконечно удаленному, которое при определенных таким образом приобразованиях всегда переходило бы само в себя, исключительной роли, мы можем присоединить еще либо проективные преобразования, либо преобразования посредством обратных радиусов.

Намеченную таким образом схему мы теперь очертим еще резче, вводя основное понятие группы. Некоторую совокупность преобразований мы называем (как уже раньше было объяснено) группой в том случае, если „сложение" (последовательное выполнение Zusammensetzung) любых двух из числа этих преобразований в результате снова дает некоторое преобразование (т. е. равносильно некоторому преобразованию), которое принадлежит той же совокупности, и если преобразование, обратное по отношению к любому из этих преобразований (тоже) принадлежит к той же совокупности. Примером группы является совокупность движений, а также совокупность коллинеаций „проективных преобразований"; ибо два движения, слагаясь, дают снова некоторое движение, а две коллинеации равносильны некоторой одной коллинеации; кроме того, в обоих случаях для каждого преобразования существует ему обратное.

Оглядываясь теперь на наши различные виды геометрии, мы видим, что преобразования, связанные с каждой из них, каждый раз образуют группу. Прежде всего все линейные подстановки, при которых остаются без изменений соотношения метрической геометрии (сдвиги, вращения, отражения и преобразования подобия), составляют группу, которой дают название главной группы пространственных преобразований

Столь же легко можно убедиться в аналогичном значении аффинной группы всех аффинных преобразований для аффинной геометрии и проективной группы всех коллинеаций для проективной геометрии. Теоремы геометрии обратных радиусов остаются в силе при всех преобразованиях, получаемых сложением любых преобразований посредством обратных радиусов с подстановками главной группы; все они вместе взятые снова образуют некоторую группу, а именно — группу „обратных радиусов". Наконец, в случае Analysis situs имеем дело с группой всех взаимно однозначных непрерывных деформаций (Verzerrungen — искривления, искажения).

Теперь я хочу установить, от скольких взаимно независимых параметров зависит отдельная операция в каждой из этих групп. В главной группе содержатся движения с шестью параметрами и к ним присоединяется еще один параметр для изменения масштаба, так что в общем имеется семь параметров; мы выражаем это, обозначая главную группу через $\mathfrak{G}_7$. Уравнения общего аффинного преобразования содержат $3 \cdot 4 = 12$, а уравнения проективного преобразования — $4 \cdot 4 = 16$ произвольных коэфициентов, причем, однако, в последнем случае один общий всем преобразованиям множитель не имеет существенного значения; таким образом аффинная группа есть некоторая $\mathfrak{G}_{12}$, а проективная есть некоторая $\mathfrak{G}_{15}$. Группа обратных радиусов представляет — я обобщаю это здесь без доказательства — некоторую $\mathfrak{G}_{10}$, и, наконец, группа всех непрерывных деформаций вообще не имеет конечного числа параметров, так как ее операции зависят от произвольных функций или, если угодно, от бесконечно многих параметров (эту группу обозначаем как $\mathfrak{G}_\infty$).

В установленной нами связи различных видов геометрии с группами преобразований можно усмотреть основной принцип, служащий для характеристики всех вообще возможных геометрий. В этом именно и заключается основная мысль моей эрлангенской программы: **пусть дана какая-либо группа пространственных преобразований, которая содержит главную группу, как свою часть; тогда теория ин-**

вариантов этой группы даст определенный вид геометрии, и таким образом можно получить любую возможную геометрию. В качестве характеристики каждой геометрии всегда ставят на первый план ее группу.

Этот принцип в литературе проведен полностью только для первых трех случаев нашей схемы; ими, как наиболее важными или наиболее известными, мы займемся еще немного, и при этом прежде всего рассмотрим переход от одного случая к другому.

Меняя порядок изложения на обратный, я начинаю с проективной геометрии, т. е. с группы $\mathfrak{G}_{15}$ всех проективных преобразований, которые мы записываем в однородных координатах:

$$\left.\begin{aligned} \rho'\xi' &= a_1\xi + b_1\eta + c_1\zeta + d_1\tau, \\ \rho'\eta' &= a_2\xi + b_2\eta + c_2\zeta + d_2\tau, \\ \rho'\zeta' &= a_3\xi + b_3\eta + c_3\zeta + d_3\tau, \\ \rho'\tau' &= a_4\xi + b_4\eta + c_4\zeta + d_4\tau. \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Чтобы притти отсюда к аффинной группе, воспользуемся тем замечанием, что проективное соответствие становится аффинным в том случае, если оно переводит бесконечно удаленную плоскость в себя, т. е. если каждой точке с исчезающим τ соответствует точка с исчезающим τ'. Ибо это сводится к тому, что $a_4 = b_4 = c_4 = 0$, и поэтому из уравнений (1) получаются путем деления (первых трех на четвертое), если, кроме того, заменить частные $a_1 : d_4, \ldots$ просто через $a_1, \ldots$, такие уравнения в неоднородном виде:

$$\left.\begin{aligned} x' &= a_1x + b_1y + c_1z + d_1, \\ y' &= a_2x + b_2y + c_2z + d_2, \\ z' &= a_3x + b_3y + c_3z + d_3, \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

а это, действительно, и есть наши старые формулы аффинного соответствия. Таким образом условие неизменяемости бесконечно удаленной плоскости выделяет из проективной группы $\mathfrak{G}_{15}$ некоторую 12-параметровую „подгруппу“, а именно, как раз аффинную группу.

Вполне аналогичным образом можно притти к **главной группе** $\mathfrak{G}_7$, определяя те проективные или, соответственно аффинные сопряжения, которые, кроме бесконечно далекой плоскости, переводят в самое себя также и **мнимый круг сфер**, т. е. те, при которых каждой точке, удовлетворяющей уравнениям:

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 0 \quad \text{и} \quad \tau = 0,$$

тоже соответствует другая точка, удовлетворяющая тем же уравнениям. Вы легко можете убедиться в правильности этого утверждения, стоит только обратить внимание на то, что наше условие определяет как раз, с точностью до некоторого постоянного множителя, шесть (однородных) констант конического сечения, соответствующего кругу сфер в силу аффинного соответствия в плоскости $\tau' = 0$, и поэтому накладывает на 12 констант аффинного соответствия $6 - 1 = 5$ условий, так что остается как раз $12 - 5 = 7$ параметров группы $\mathfrak{G}_7$.

Весь этот ход идей получил в 1859 г. очень важный новый оборот в руках великого английского геометра **Кэли** (A. **Cayley**)[1]. В то время как до сих пор казалось, что аффинная и проективная геометрия являются сравнительно более скудными извлечениями из метрической геометрии, Кэли делает возможным, наоборот, **как аффинную, так и метрическую геометрию включить в проективную в качестве ее частных случаев**: „**projective geometry is all geometry**" (т. е. „проективная геометрия — это **вся** геометрия"). Это соотношение, кажущееся, пожалуй, на первый взгляд парадоксальным, обнаруживается в том случае, если к исследуемым фигурам присоединить определенные образы, а именно, **бесконечно удаленную плоскость** или соответственно **круг сфер на ней; тогда аффинные или соответственно метрические свойства фигуры оказываются не чем иным, как проективными свойствами расширенной (пополненной) таким образом фигуры.**

[1]) „A sixth memoir upon quantics", Philosophical Transactions of the Royal Society of London, 1859, Collected mathematical papers, II Cambridge 1889) p. 561 a. ff.

Позвольте мне это разъяснить прежде всего на двух очень простых примерах, причем я лишь выскажу в несколько измененной форме уже ранее известные вам факты. То, что две прямые параллельны, не имеет для проективной геометрии вначале никакого значения; если же к данным образам (к обеим прямым) присоединить бесконечно удаленную плоскость, то становится правильным (ср. стр. 56) то чисто проективное утверждение, что две данные прямые на данной плоскости пересекаются. Нечто подобное имеем в том случае, если прямая расположена перпендикулярно к некоторой плоскости. Это можно свести (ср. стр. 204 и сл.) к некоторому полярному соотношению — ведь это есть проективное свойство — нашей фигуры, расширенной присоединением к ней круга сфер (ср. рис. 98): точка P_∞ как след прямой и прямая g_∞ как след плоскости на бесконечно удаленной плоскости должны по отношению к кругу сфер представлять полюс и поляру.

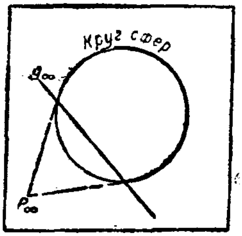

Рис. 98.

Теперь я хотел бы полнее развить намеченный здесь ход идей и показать, как он приводит к некоторому вполне систематическому построению геометрии. Наибольшая заслуга в этом отношении принадлежит англичанам; я уже назвал Кэли и рядом с ним я должен упомянуть еще Сильвестра (J. J. Sylvester) и Сальмона (G. Salmon) в Дублине. Эти геометры создали, начиная с 1850 г., ту алгебраическую дисциплину, которую называют в более узком смысле теорией инвариантов линейных однородных подстановок[1]), и которая делает возможной, при помощи принципа Кэли, полную систематику геометрии на аналитической основе. Для понимания этой систематики нам необходимо предварительно заняться немного самой теорией инвариантов.

[1]) Термин „теория инвариантов" употребляют также в более широком смысле, относя его к любым группам преобразований; в том более узком смысле, в каком мы будем его понимать в дальнейшем, его стал впервые употреблять Сильвестр.

2. Отступление в область теории инвариантов линейных подстановок

Конечно, здесь я могу изложить в форме краткого реферата лишь главные ходы мыслей и результаты, не приводя ни деталей ни доказательств. Что же касается литературы этой обширной области, то прежде всего я укажу на отчет Франца Мейера (W. Fr. Meyer). „Успехи проективной теории инвариантов за последнюю четверть века“ в I томе „Jahresbericht der deutschen Mathematiker-Vereinigung“, 1892, а также на реферат „Теория инвариантов“ того же автора в „Энциклопедии математических наук“ (Enz., Bd. I., B. 2). То, что применяется из теории инвариантов в геометрии, можно найти, в частности, в курсах Сальмона, которые несомненно наиболее содействовали распространению относящихся сюда идей и которыми в немецкой обработке Фидлера (W. Fiedler) всегда чрезвычайно много пользовались [1]). В том же направлении составлены также и лекции Клебша (A. Clebsch) [2]), изданные Линдеманом (Lindemann).

Переходя теперь к нашей теме, мы

1) представляем себе заданным произвольное число переменных и соответственно этому говорим о бинарной, тернарной, кватернарной,... (или двоичной, троичной, четверичной,...) области. Имея в виду позже рассматривать переменные в первых трех случаях как однородные координаты на прямой, на плоскости или в пространстве, вводим для них обозначения:

$$\xi,\ \tau;\quad \xi,\ \eta,\ \tau;\quad \xi,\ \eta,\ \zeta,\ \tau,$$

причем уравнение $\tau=0$ всегда должно будет характеризовать бесконечно удаленные элементы.

---

[1]) Сальмон написал 4 курса: 1) „Конические сечения“, 2) „Плоские (высшие) кривые“, 3) „Аналитическая геометрия трех измерений“. 4) „Высшая алгебра“. [Существуют дословные переводы: французский всех 4 курсов и русский (в разных изданиях) 1-го и 3-го курсов. Немецкое издание Фидлера представляет совершенную переработку английского оригинала, сильно увеличившую его объем и утратившую изящество его изложения.]

[2]) Vorlesungen über Geometrie, bearbeitet von F. Lindemann, Leipzig (Teubner), 1. Aufl. (1876 ff.); 2 Aufl. (1906 ff.).

[Существует перевод на французский язык: Clebsch, Leçons sur Géométrie, т. I—III, Paris 1879—1883.]

2) Мы рассматриваем группы всех однородных линейных подстановок этих переменных, причем на первое время мы будем принимать во внимание не только отношения переменных (так мы будем поступать позже в проективной геометрии), но также и их индивидуальные значения. Эти подстановки записываем в таком виде:

$$\begin{aligned}\xi' &= a_1\xi + d_1\tau,\\ \tau' &= a_4\xi + d_4\tau,\end{aligned}\qquad \begin{aligned}\xi' &= a_1\xi + b_1\eta + d_1\tau,\\ \eta' &= a_2\xi + b_2\eta + d_2\tau,\\ \tau' &= a_4\xi + b_4\eta + d_4\tau,\end{aligned}\qquad \begin{aligned}\xi' &= a_1\xi + b_1\eta + c_1\zeta + d_1\tau,\\ \eta' &= a_2\xi + b_2\eta + c_2\zeta + d_2\tau,\\ \zeta' &= a_3\xi + b_3\eta + c_3\zeta + d_3\tau,\\ \tau' &= a_4\xi + b_4\eta + c_4\zeta + d_4\tau.\end{aligned}$$

Число параметров в этих трех группах равно соответственно 4, 9, 16.

Чтобы в дальнейшем можно было охватить одной записью различные числа измерений, мы будем выписывать в формулах всегда лишь переменные ξ и τ и составленные из них члены, отделяя их друг от друга несколькими точками. Тогда, в случае бинарной области надо будет просто игнорировать эти точки, а в случае троичной или четверичной области, заменять их членами, содержащими η или соответственно η и ζ, аналогичными выписанным членам (с ξ и τ). Мы будем таким образом говорить о переменных:

$$\xi, \ldots, \tau$$

и о выполняемых над ними подстановках

$$\left.\begin{aligned}\xi' &= a_1\xi + \ldots + d_1\tau,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \tau' &= a_4\xi + \ldots + d_4\tau.\end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

3) Что касается объектов теории инвариантов, то можно различать две стадии в постановке вопроса. Во-первых, пусть даны любые отдельные системы значений переменных:

$$\xi_1, \ldots, \tau_1;\quad \xi_2, \ldots, \tau_2;\quad \xi_3, \ldots, \tau_3; \ldots;$$

имея в виду геометрические приложения, мы можем уже теперь обозначать их просто как **точки** 1; 2; 3;... Каждую из этих систем значений в отдельности подвергаем подстановкам группы (1); вопрос сводится к тому чтобы **образовать такие сочетания наших систем** значений, которые оставались бы инвариантными при этих одновременных подстановках.

4 Вторая стадия в постановке вопроса имеет дело наряду с такими точками также и с функциями переменных, а именно, в первую очередь с целыми рациональными функциями; при этом можно ограничиться однородными целыми рациональными функциями — в теории инвариантов их называют формами, — так как члены одинакового измерения и без того переходят друг в друга по причине однородности подстановок. Таким образом нам придется рассматривать сперва линейные формы:

$$\varphi = \alpha\xi + \ldots + \delta\tau,$$

затем квадратичные формы:

$$f = A\xi^2 + \ldots + 2G\xi\tau + \ldots + K\tau^2$$

и т. д. Нам придется также рассматривать одновременно несколько форм одного и того же измерения, различая их при помощи индексов, например,

$$\varphi_1 = \alpha_1\xi + \ldots + \delta_1\tau; \quad \varphi_2 = \alpha_2\xi + \ldots + \delta_2\tau; \ldots$$

Исходным пунктом могут служить также формы со многими рядами переменных, например, билинейные формы:

$$f = A\xi_1\xi_2 + \ldots + \Delta\xi_1\tau_2 + \ldots + N\tau_1\xi_2 + \ldots + \Pi\tau_1\tau_2.$$

Для выяснения возникающей здесь общей проблемы, мы должны сперва разобраться в том, как преобразовываются коэфициенты этих форм, в то время как переменные подвергаются подстановкам группы (1), а значение формы φ или соответственно f остается без изменения. Рассмотрим сперва линейную форму, полагая

$$\varphi = \alpha\xi + \ldots + \delta\tau = \alpha'\xi' + \ldots + \delta'\tau'.$$

Если ввести выражения (1) для $\xi', \ldots, \tau'$, то должно иметь место такое тождество относительно переменных $\xi, \ldots, \tau$:

$$\alpha\xi + \ldots + \delta\tau = \alpha'(a_1\xi + \ldots + d_1\tau) + \ldots + \delta'(a_4\xi + \ldots + d_4\tau) =$$
$$= (\alpha' a_1 + \ldots + \delta' a_4)\xi + \ldots + (\alpha' d_1 + \ldots + \delta' d_4)\tau.$$

Отсюда находим:

$$\left.\begin{array}{l} \alpha = a_1\alpha' + \ldots + a_4\delta', \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \delta = d_1\alpha' + \ldots + d_4\delta'. \end{array}\right\} \qquad (2)$$

Таким образом новые коэфициенты $\alpha', \ldots, \delta'$ линейной формы связаны со старыми коэфициентами $\alpha, \ldots, \delta$ в свою очередь линейною подстановкою, получаемою из (1) следующим простым образом: переставляем вертикальные и горизонтальные ряды в схеме коэфициентов („транспонируем" подстановку) и, кроме того, меняем местами старые величины (не имеющие штрихов) и новые (со штрихами). Получаемую таким образом подстановку называют контрагредиентной по отношению к первоначальной (1) и говорят для краткости, что коэфициенты $\alpha, \ldots, \delta$ линейной формы преобразовываются контрагредиентным образом по сравнению с переменными $\xi, \ldots, \tau$. Ранее рассмотренные ряды переменных $\xi_1, \ldots, \tau_1$; $\xi_2, \ldots, \tau_2$; ..., которые подлежат все вместе каждый раз одному и тому же преобразованию (1), носят название в аналогичной терминологии когредиентых переменных.

Переходя к квадратичной форме f, сообразим прежде всего, как ведут себя при линейной подстановке входящие в нее члены второго измерения $\xi^2, \ldots, \xi\tau, \ldots, \tau^2$; на основании (1) сразу же находим для членов второго измерения с новыми переменными такие выражения:

$$\left.\begin{array}{l} \xi'^2 = a_1^2\xi^2 + \ldots + 2a_1d_1\xi\tau + \ldots + d_1^2\tau^2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \xi'\tau' = a_1a_4\xi^2 + \ldots + (a_1d_4 + a_4d_1)\xi\tau + \ldots + d_1d_4\tau^2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \tau'^2 = a_4^2\xi^2 + \ldots + 2a_4d_4\xi\tau + \ldots + d_4^2\tau^2. \end{array}\right\}$$

Это мы можем выразить в такой форме: члены второго измерения относительно переменных испытывают одновременно с ними однородную линейную подстановку, получаемую непосредственно из (1). Но f является линейной формой этих квадратичных членов, так что, повторяя в точности прежние рассуждения, мы видим, что коэфициенты $A, \ldots, 2G, \ldots, K$ преобразовываются линейно-однородно, а именно, контрагредиентно по отношению к подстановке (3) членов $\xi^2, \ldots, \xi\tau, \ldots, \tau^2$; другими словами, уравнения, содержащие $A, \ldots, 2G, \ldots, K$ и $A', \ldots, 2G', \ldots K'$, получаются из (3) точно так же, как уравнения (2) из (1).

5) Теперь мы можем формулировать общую проблему теории инвариантов. Если задан какой-либо ряд точек 1; 2;..., а также ряд линейных, квадратичных либо высших форм φ_1; φ_2;...; f_1; f_2;..., то под инвариантом понимают такую функцию координат $\xi_1, \ldots, \tau_1$; $\xi_2, \ldots, \tau_2$;... и коэфициентов $\alpha_1, \ldots \delta_1$; α_2; ..., δ_2;...; $A_1, \ldots, K_1$; $A_2, \ldots, K_2$;..., которая остается без изменения при линейных подстановках переменных (1) и при соответственных только что определенных подстановках систем коэфициентов. Требуется изучить совокупность всех вообще возможных инвариантов.

В литературе встречаются также при случае слова: „ковариант“ и „контравариант“ для обозначения особых видов образований, обозначаемых здесь общим названием инвариантов. А именно, если в инвариантное выражение входят сами ряды переменных $\xi_1, \ldots, \tau_1$; $\xi_2, \ldots, \tau_2$;..., то говорят о ковариантах; если же в него входят коэфициенты линейных форм $\alpha_1, \ldots, \delta_1$; $\alpha_2, \ldots, \delta_2$;..., то употребляют термин „контра варинт“. Слово же инвариант употребляют тогда в применении к таким выражениям, которые не содержат ни координат $\xi_1, \ldots$ ни коэфициентов $\alpha_1, \ldots$ и составлены исключительно из коэфициентов квадратичных или высших форм. Выделение и противопоставление первых двух случаев объясняется тем, что ряды переменных: $\xi, \ldots, \tau$, с одной стороны, и $\alpha, \ldots, \delta$, с другой строны, обнаруживают до известной степени взаимно обратное поведение: когда одни из них подвергаются некоторой линейной подстановке, то другие испытывают как раз контрагредиентную подстановку, независимо от того, из какого ряда исходят. Таким образом из каждого инвариантного образования из величин одного рода можно при помощи подходящего преобразования получить такое же образование из величин другого рода. В геометрическом толковании это дает, очевидно, **принцип двойственности, так как** $\alpha, \ldots, \delta$ **становятся** однородными, линейными или соответственно плоскостными координатами, если $\xi, \ldots, \tau$ рассматривать как точечные координаты. Впрочем, различение того, входят ли системы значений $\xi, \ldots, \tau$ или соответственно значений $\alpha, \ldots, \delta$, или не входят в те выражения, которые надо установить, конечно, совершенно лишено основного значения; поэтому в дальнейшем мы будем употреблять слово инвариант в более широком смысле.

б) Теперь я попытаюсь резче очертить в другом направлении это понятие инварианта, чтобы сделать возможным упорядоченное построение теории. В дальнейшем мы будем рассматривать в качестве инвариантов только рациональные функции координат и коэфициентов, которые сверх того являются однородными относительно координат каждой отдельной входящей в них точки и относительно коэфициентов каждой отдельной входящей в них формы. Каждую такую рациональную функцию мы можем представить в виде частного двух целых рациональных однородных функций, которые мы будем исследовать каждую в отдельности. Так как общий множитель числителя и знаменателя не меняет величины частного, то последние, конечно, не обязаны непременно быть инвариантами в том смысле, в каком мы до сих пор понимали этот термин, но могут при каждой линейной подстановке приобретать известного множителя.

Можно показать, что этот множитель зависит исключительно от коэфициентов подстановки и является всегда некоторой степенью определителя подстановки:

$$r = \begin{vmatrix} a_1 \ldots d_1 \\ \ldots \\ a_4 \ldots d_4 \end{vmatrix}.$$

Таким путем мы приходим, в конце концов, к рассмотрению таких целых рациональных однородных функций данных рядов величин, которые при установленных выше линейных подстановках переменных и коэфициентов умножаются на некоторую степень r^λ определителя подстановки. Их называют относительными (relative) инвариантами, так как они испытывают лишь несущественные изменения, а в случае подстановок, для которых $r=1$, и вовсе не изменяются. Показатель λ носит название веса инварианта. В противоположность этому то, что мы до сих пор называли просто инвариантом, называют абсолютным инвариантом; таким образом каждый абсолютный инвариант равен частному двух относительных инвариантов одинакового веса.

7) Это действительно дает нам руководящую точку зрения для систематизации теории инвариантов. Простейшими относительными инвариантами явятся те, которые представляют собою многочлены возможно низкой степени относительно данных рядов величин; исходя из них, переходят к инвариантам более высокой степени. Если J_1, J_2 представляют какие-либо относительные инварианты, то всякое произведение их степеней $J_1^{k_1} \cdot J_2^{k_2}$ оказывается тоже относительным инвариантом; ведь если J_1 получает при подстановке множитель r^{λ_1}, а J_2 множитель r^{λ_2}, то J^{k_1}, J^{k_2} воспроизводится с точностью до множителя $r^{k_1\lambda_1+k_2\lambda_2}$. Составляя сумму таких членов, умноженных, кроме того, на постоянных множителей:

$$\sum_{(k_1, k_2, \ldots)} C_{k_1, k_2 \ldots} J_1^{k_1} J_2^{k_2},$$

и следя при этом за тем, чтобы отдельные слагаемые умножались всегда на одинаковую степень r, т. е. за тем, чтобы все они имели равный вес или — как говорят — были „изобаричны“, получаем, очевидно, снова относительный инвариант более высокой степени, так как общий множитель отдельных членов просто выходит за знак суммы.

Центральною проблемою теории инвариантов является, конечно, вопрос, можно ли таким образом всегда получить все инварианты: что является в каждом определенном случае полной системой наинизших инвариантов, из которых могут быть построены указанным целым и рациональным способом все относительные инварианты? И вот основная теорема состоит в том, что каждому конечному числу заданных величин всегда соответствует подобная конечная „полная система инвариантов“, т. е. конечное число инвариантов, из которых все прочие составляются целым рациональным образом. Этими окончательными результатами систематической теории инвариантов мы обязаны немецким исследователям, а именно, Гордану (P. Gordan) и Гильберту (G. Hilbert); в особенности следует отметить работу последнего, помещенную в 36-м томе журнала „Mathematische Annalen“ [1]).

Теперь я хотел бы изложенные абстрактные идеи разъяснить несколько конкретнее на простых примерах, которые нам пригодятся вслед за этим в геометрии, причем я и тут, конечно, буду больше реферировать, чем доказывать.

1) Допустим сперва, что в бинарной области задано попросту некоторое число точек:

$$\xi_1, \tau; \ \xi_2, \tau_2; \ \xi_3, \tau_3; \ldots$$

В таком случае имеет место такая интересная теорема: простейшие инварианты получаются помощью определителей второго порядка, которые можно составить из этих координат, и эти определители образуют в то же время полную систему инвариантов.

Из двух точек *1*, *2* мы можем составить один определитель второго порядка:

$$\Delta_{12} = \begin{vmatrix} \xi_1 & \tau_1 \\ \xi_2 & \tau_2 \end{vmatrix}.$$

Он, действительно, представляет собой целую рациональную функцию переменных, однородную как относительно ξ_1, τ_1, так и относительно ξ_2, τ_2. В его инвариантной природе мы убедимся сразу, если вычислим его, пользуясь теоремой умножения определителей:

$$\Delta'_{12} = \begin{vmatrix} \xi_1' & \tau_1' \\ \xi_2' & \tau_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1\xi_1 + d_1\tau_1, & a_4\xi_1 + d_4\tau_1 \\ a_1\xi_2 + d_1\tau_2, & a_4\xi_2 + d_4\tau_2 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_1 & d_1 \\ a_4 & d_4 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \xi_1 & \tau_1 \\ \xi_2 & \tau_2 \end{vmatrix} = r \cdot \Delta_{12},$$

[1]) „Über die Theorie der algebraischen Formen“, Bd. 36, S. 473 ff., 1890.

так что, действительно, имеем дело с инвариантом **в е с а** 1. Подобным же образом n точек $1, 2, \ldots, n$ дают в общем $\frac{n(n-1)}{2}$ инвариантов веса 1:

$$\Delta_{ik} = \begin{vmatrix} \xi_i & \tau_i \\ \xi_k & \tau_k \end{vmatrix} (i,\ k = 1, 2, \ldots, n);$$

мы зашли бы, конечно, слишком далеко, если бы стали доказывать здесь, что эти определители образуют **п о л н у ю** систему инвариантов, т. е. что каждый относительный инвариант n точек может быть представлен в виде суммы изобаричных членов:

$$\sum C \cdot \Delta_{ik}^{s}\, \Delta_{lm}^{t} \ldots$$

Из этих относительных инвариантов получаются самые общие рациональные абсолютные инварианты в виде частных с равным весом числителя и знаменателя; таким образом простым примером абсолютного инварианта было бы частное $\frac{\Delta_{ik}}{\Delta_{lm}}$.

Я хотел бы на этом примере разъяснить еще одно более тонкое понятие, играющее в теории инвариантов большую роль, а именно, понятие **с и з и г и й**[1]) (т. е. „связываний" или сочетаний инвариантов). А именно, может случиться, что некоторые из упомянутых агрегатов, составленных из основных инвариантов, тождественно обращаются в нуль; так, например, в случае четырех точек:

$$\Delta_{12}\Delta_{34} + \Delta_{13}\Delta_{42} + \Delta_{14}\Delta_{23} = 0,$$

что сводится попросту к известному тождеству из теории определителей, которым к тому же нам уже случилось воспользоваться. Подобное тождество, связывающее инварианты полной системы, и называется **с и з и г и е й** (Syzygie). Имея несколько таких сизигий, можно путем сложения и умножения получить из них новые; можно, как и в случае самих инвариантов, поставить вопрос о **п о л н о й с и с т е м е с и з и г и й**, из которых все

[1]) [„Сизигий" — астрономический термин, означающий соединение или противостояние планет.]

прочие могут быть построены указанным образом. Теория показывает, что всегда существует конечная система сизигий подобного рода. Так, например, в случае четырех точек эта полная система состоит из одного только вышенаписанного уравнения, т. е. все тождества, связывающие шесть определителей $\Delta_{12},\ldots,\Delta_{34}$, являются следствиями этого одного тождества; в случае большего числа точек такая система состоит из всех уравнений такого же типа. Разумеется, знание этих сизигий имеет фундаментальное значение для знания всей системы инвариантов; ибо в том случае, когда два изобаричные агрегата простейших инвариантов отличаются один от другого членами, имеющими множителем левую часть какой-нибудь сизигии, эти агрегаты тождественны, и нам незачем перечислять их дважды.

2) Если заданы отдельные точки втроичной либо в четверичной области, то строим совершенно таким же образом полные системы инвариантов посредством определителей 3-го и 4-го порядка, составленных из их координат; например, в троичной области фундаментальный инвариант трех точек снова имеет вес 1:

$$\Delta_{123} = \begin{vmatrix} \xi_1 & \eta_1 & \tau_1 \\ \xi_2 & \eta_2 & \tau_2 \\ \xi_3 & \eta_3 & \tau_3 \end{vmatrix}.$$

Предлагаю вам самим продумать, в каком виде представляется здесь все прочее, в частности отыскание сизигий.

3) Перейдем теперь сразу же к рассмотрению квадратичной формы, например, в четвертичной области:

$$f = A\xi^2 + 2B\xi\eta + C\eta^2 + 2D\xi\zeta + 2E\eta\zeta + F\zeta^2 + \\ + 2G\xi\tau + 2H\eta\tau + 2J\zeta\tau + K\tau^2.$$

Мы можем, прежде всего, составить инвариант, зависящий только от 10 коэфициентов $A,\ldots,K$, а именно определитель:

$$\Delta = \begin{vmatrix} A & B & D & G \\ B & C & E & H \\ D & E & F & J \\ G & H & J & K \end{vmatrix}.$$

Так как $A, \ldots, K$ преобразовываются контрагредиентно по сравнению с членами квадратичными относительно $\xi, \ldots, \tau$, то легко можно убедиться в том, что вес этого инварианта равен -2:

$$\Delta' = r^{-2} \cdot \Delta.$$

Полная система инвариантов, составленных исключительно из коэфициентов формы, состоит из одного только этого Δ, т. е. всякий целый рациональный инвариант, содержащий лишь $A, \ldots, K$, является кратным некоторой степени Δ.

Если же к коэфициентам формы присоединить координаты ξ, η, ζ, τ какой-либо точки, то сама форма f оказывается простейшим общим инвариантом или — согласно упомянутой выше терминологии — ковариантом, так как вообще самое определение преобразований коэфициентов $A, \ldots, K$ было основано на требовании ее инвариантности; и вообще всякая заданная форма является, очевидно, своим же собственным ковариантом. Она даже вовсе не изменяется при наших подстановках в силу самого их определения, представляя, следовательно, инвариант веса 0 или абсолютный инвариант. В случае двух точек $\xi_1, \ldots, \tau_1$ и $\xi_2, \ldots, \tau_2$ появляется в качестве нового ковариантa так называемая полярная форма:

$$A\xi_1\xi_2 + B(\xi_1\eta_2 + \xi_2\eta_1) + C\eta_1\eta_2 + \ldots + K\tau_1\tau_2,$$

вес которой снова равен нулю, т. е. опять таки представляющая абсолютный инвариант.

Наконец, рассматривая одновременно с f еще какую-нибудь линейную форму φ, т. е. совокупность ее коэфициентов $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, получаем следующий совокупный (simultan) инвариант веса -2, который возникает из определителя посредством так называемого процесса его „окаймления“ элементами $\alpha, \ldots, \delta$:

$$\begin{vmatrix} A & B & D & G & \alpha \\ B & C & E & H & \beta \\ D & E & F & J & \gamma \\ G & H & J & K & \delta \\ \alpha & \beta & \gamma & \delta & 0 \end{vmatrix}.$$

Согласно сказанному раньше, его можно назвать также контравариантом. Как известно, этот определитель играет большую роль в аналитической геометрии в тех случаях, когда хотят поверхность второго порядка представить в плоскостных координатах; как видите, в этом случае в основе лежит чисто аналитический процесс образования инвариантов.

Точно так же в случае двух линейных форм φ_1, φ_2 с коэфициентами $\alpha_1, \ldots, \delta_1$ и $\alpha_2, \ldots, \delta_2$ можно посредством „двукратного окаймления" того же самого определителя образовать еще один инвариант:

$$\begin{vmatrix} A & B & D & G & \alpha_1 & \alpha_2 \\ B & C & E & H & \beta_1 & \beta_2 \\ D & E & F & J & \gamma_1 & \gamma_2 \\ G & H & J & K & \delta_1 & \delta_2 \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 & \delta_1 & 0 & 0 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 & \delta_2 & 0 & 0 \end{vmatrix},$$

который тоже имеет вес -2.

Этих немногих указаний достаточно для того, чтобы позволить вам заглянуть в грандиозную область теории инвариантов. Эта теория развилась в необычайно широкое учение, в котором особенно много остроумия затрачено на отыскание приемов, позволяющих при произвольно заданных основных формах составить полную систему инвариантов и сизигий. Еще одно только замечание общего характера по этому поводу. В наших примерах мы всегда создавали инварианты путем образования определителей; таким образом вообще теория определителей всегда оказывается основой теории инвариантов. Такое положение дел побудило Кэли первоначально дать инвариантам название „гипердетерминантов" (сверхопределителей). Лишь позже Сильвестр ввел слово „инвариант". Представляется крайне интересным поставить такой вопрос: насколько важной следует считать в рамках всей математики какую-нибудь отдельную ее главу, например теорию определителей? Кэли сказал как-то в разговоре со мною, что в случае, если бы ему пришлось прочесть 15 лекций по всей математике, то одну лекцию он посвятил бы определителям. Подумайте, можете ли и вы на основании вашего опыта дать такую же оценку теории определителей! Я лично в моих обычных элементарных курсах из педагогических соображений все более и более оттесняю теорию определителей; я слишком часто наблюдал, что студенты вполне свыкаются со **схемами** и научаются сокращать с их помощью очень целесообразным образом длинные выражения, но что для них очень часто значение этих схем отнюдь не бывает ясно и что привычка к схеме скорее даже мешает им вникнуть во все детали предмета вплоть до полного овладения им. Но, разумеется, при рассуждениях общего характера и, в частности, здесь в теории инвариантов, мы никак не можем обойтись без определителей.

Теперь, наконец мы подошли к нашей настоящей цели — с помощью предшествующих рассмотрений получить систематизацию геометрии.

3. Приложение теории инвариантов к геометрии

Начинаем с того, что рассматриваем переменные $\xi, \ldots, \tau$ **как обыкновенные ортогональные неоднородные координаты**, т. е. ξ, τ как координаты на плоскости, ξ, η, τ — в трехмерном пространстве, ξ, η, ζ, τ — в четырех мерном пространстве и т. д. Линейные однородные подстановки теории инвариантов:

$$\begin{aligned} \xi' &= a_1\xi + \ldots + d_1\tau, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \tau' &= a_4\xi + \ldots + d_4\tau \end{aligned} \tag{1}$$

изображают в таком случае **совокупность аффинных преобразований рассматриваемого пространства при неподвижном начале координат**. Таким образом отдельные относительные инварианты сами по себе оказываются такими геометрическими величинами, которые при всех аффинных преобразованиях остаются без изменения „до некоторого множителя" (т. е. не считая возможного появления некоторого множителя), иными словами, — величины, которые имеют определенное значение в аффинной геометрии, определяемой этими преобразованиями.

Если, например, в бинарном случае, т. е. в плоскости, даны две точки *1*, *2*, то основной инвариант Δ_{12} изображает двойную площадь треугольника (*0 1 2*), взятую с надлежащим знаком, как мы это уже знаем из предшествующего. Действительно, известно (ср. констатирование аналогичного свойства для пространства, что при аффинном преобразовании площадь треугольника лишь умножается на определитель подстановки, а это и означает, что Δ_{12} представляет относительный инвариант веса 1. Частное двух площадей $\frac{\Delta_{12}}{\Delta_{34}}$ остается абсолютно неизменным, и точно так же уравнение $\Delta_{12}=0$, так как привходящий множитель для него не имеет существенного значения; и, действительно, это уравнение имеет по отношению к нашим аффинным преобразованиям, очевидно, то абсолютно инвариантное значение, что три точки *0*, *1*, *2* лежат на одной прямой.

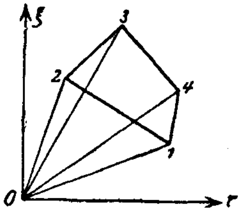

Рис. 99.

Если же имеем большее число точек *1*, *2*, *3*, *4*, ... (рис. 99), то для них полная система инвариантов состоит из всех их определителей Δ_{ik}; поэтому, если удается составить какую-либо величину, зависящую целым и рациональным образом от координат, которая относительно инвариантна при всех аффинных преобразованиях (1), т. е. которая вообще имеет значение в нашей аффинной геометрии, то такая величина должна изображаться в виде многочлена из Δ_{ik}. Это поддается в простых случаях непосредственной геометрической проверке. Например, площадь всякой фигуры на плоскости, скажем — многоугольника (*1*,*2*,*3*,*4*), представляет подобный инвариант, и, действительно, формула, которую мы дали раньше (см. стр. 25) вообще для площади многоугольника:

$$(1,\ 2,\ 3,\ 4)=\Delta_{12}+\Delta_{23}+\Delta_{34}+\Delta_{41},$$

представляет не что иное, как выражение общей теоремы для этого специального случая.

Наконец, мы должны еще сказать о *сизигиях* между инвариантами. Основная сизигия:

$$\Delta_{12}\Delta_{34} + \Delta_{13}\Delta_{42} + \Delta_{14}\Delta_{23} = 0$$

представляет тождество между шестью площадями треугольников, образуемых четырьмя произвольными точками и началом, т. е. некоторую общую теорему нашей аффинной геометрии. Конечно, нечто аналогичное имеем в случае каждой сизигии, и точно так же и обратно: каждая теорема нашей аффинной геометрии, поскольку она является соотношением между инвариантами аффинных преобрззований (1), должна допускать изображение при помощи сизигии. Поэтому в согласии с тем, что мы уже в свое время утверждали относительно *полной* системы сизигий в случае четырех точек, *все* теоремы, имеющие место в нашей аффинной геометрии для системы четырех точек, должны следовать из этой одной только что приведенной теоремы. Подобным же образом можно убедиться в справедливости такого общего утверждения: *теория инвариантов, давая полную систему как инвариантов, так и сизигий, тем самым делает возможным полное (без исключений) систематическое перечисление всех величин и теорем, возможных в нашей аффинной геометрии.*

Я и здесь не буду входить в детали этих рассуждений; упомяну только, что наряду с точками можно рассматривать также и образы нашей геометрии, определяемые формами:

$$\varphi = a\xi + b\tau,\ f = A\xi^2 + 2G\xi\tau + K\tau^2, \ldots$$

Подобная форма относит каждой точке плоскости некоторое числовое значение; другими словами, она определяет некоторое *скалярное поле*. С этой точки зрения нетрудно дать геометрическое толкование инвариантов заданной формы, и тогда каждая сизигия между инвариантами снова изобразит некоторую геометрическую теорему.

Наряду с этим, я бы сказал, наивным толкованием теории инвариантов в геометрии n-мерного пространства, в котором n переменных играют роль обыкновенных прямоугольных координат, подлежит рассмотрению еще одно существенно иное изображение: все эти переменные можно также рассматривать как однородные координаты в $(n-1)$-мерном пространстве R_{n-1}, неоднородные координаты которого равны $x=\frac{\xi}{\tau}, \ldots$; при этом множитель, общий этим n координатам, не имеет существенного значения. Мы раньше уже выяснили (стр. 148 и сл.), в какой связи находятся эти определения координат пространств R_{n-1} и R_n: мы рассматривали R_{n-1} как линейный $(n-1)$-мерный образ $\tau=1$ пространства R_n и проектировали его точки лучами, исходящими из начала координат этого R_n. Тогда все возможные системы значений однородных координат любой точки из R_{n-1} оказывались тождественными с координатами всех соответствующих ей (т. е. лежащих на одном с нею луче) точек в R_n. А все линейные подстановки однородных координат в R_{n-1} изображают **проективные преобразования**, причем все подстановки, различающиеся только произвольным множителем ρ',

$$\begin{aligned} \rho'\xi' &= a_1\xi + \ldots + d_1\tau, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \rho'\tau' &= a_4\xi + \ldots + d_4\tau, \end{aligned}$$

дают одно и то же проективное преобразование. Поэтому фигурирующая здесь **группа всех проективных преобразований** содержит не n^2, а только n^2-1 **произвольных постоянных**; в R_2 и R_3 этими числами будут, в частности, 8 и соответственно 15.

Желая дать **геометрическое толкование теории инвариантов** n **переменных** $\xi, \ldots, \tau$ **в проективной геометрии пространства** R_{n-1}, мы должны прежде всего принять во внимание, что как раз ввиду применения однородных координат только те величины и соотношения теории инвариантов могут иметь значение, которые оказываются однородными и притом нулевого порядка в координатах $\xi, \ldots, \tau$ каждой отдельной употребляемой точки и которые обладают тем же свойством также и по отношению к каждой отдельной могущей появиться системе коэфициентов какой-либо линейной, квадратичной и т. д. формы.

Это станет всего яснее, если я сразу же перейду к конкретным примерам. Достаточно будет говорить о бинарной области ($n=2$). Имеем, таким образом, две переменных ξ, τ и толкуем $x=\frac{\xi}{\tau}$ как абсциссу на прямой. Если дан ряд систем значений ξ_1, τ_1; $\xi_2, \tau_2, \ldots, \xi_p, \tau_p$, то мы знаем, что определители

$$\Delta_{ik}=\begin{vmatrix}\xi_i & \tau_i\\ \xi_k & \tau_k\end{vmatrix} \quad (i,k=1,\ldots,p)$$

составляют полную систему основных инвариантов. Какие же из числа всех инвариантных утверждений имеют значение в проективной геометрии? Уж во всяком случае не утверждение, что некоторый Δ_{ik} имеет то или иное определенное числовое значение, так как при умножении ξ_i, τ_i на множитель ρ, отчего точка i не меняется, Δ_{ik} также умножается на ρ. Но исчезновение одного из Δ_{ik}, т. е. соотношение $\Delta_{ik}=0$, конечно, имеет проективно-геометрическое значение, ибо его можно записать в виде пропорции $\frac{\xi_i}{\tau_i}=\frac{\xi_k}{\tau_k}$, так что действительно в это соотношение входят только отношения координат обеих точек, и его геометрическое значение — совпадение точек i и k — является очевидным.

Но чтобы получить числовой инвариант, который сам имеет нулевое измерение относительно координат каждой точки, надо скомбинировать более двух точек. Путем различных проб находим, что для этого требуется самое меньшее четыре точки — *1*, *2*, *3*, *4*, а именно, в таком случае каждое частное следующего строения:

$$\frac{\Delta_{12}\cdot\Delta_{34}}{\Delta_{14}\cdot\Delta_{32}}$$

оказывается однородным нулевого измерения относительно каждой из четырех пар переменных $\xi_1, \tau_1; \ldots, \xi_4, \tau_4$. Из этого в то же время следует, что это частное имеет вес нуль, т. е. представляет абсолютный инвариант. Эта величина имеет поэтому проективное значение и представляет числовое значение, инвариантное по отношению ко всем проективным преобразованиям прямой. Разумеется, она является не чем иным, как „двойным" (или „ангармоническим") отношением четырех точек, написанных в определенной последовательности, ибо ее можно сразу же записать в неоднородных координатах в следующем виде:

$$\frac{x_1 - x_2}{x_1 - x_4} : \frac{x_3 - x_2}{x_3 - x_4}.$$

Таким образом **двойное отношение четырех точек** получается здесь с точки зрения теории инвариантов неизбежным образом как **простейший инвариант** ряда точек на прямой, удовлетворяющий условию однородности, необходимому для того, чтобы иметь проективно-геометрическое значение.

Я хотел бы в связи с этим высказать одно замечание общего характера. Я уже раньше отметил часто встречающееся в проективной геометрии стремление сводить все попадающиеся величины инвариантного характера к двойным отношениям. Достигнутые нами результаты дают нам основание утверждать, что это стремление лишь затрудняет приобретение более глубокого понимания строения проективной геометрии. Гораздо лучше, если сперва ищут все вообще рациональные целые (относительные) инварианты и уже из них образуют рациональные инварианты, в частности абсолютные, а среди последних в свою очередь удовлетворяющие условию однородности проективной геометрии. Здесь мы имеем перед собой действительную систематику, восходящую от самого простого к более сложному, которая затушевывается, если выдвигать на первое место специальный частный случай рационального инварианта — двойное отношение — и пытаться представить другие инварианты исключительно с его помощью.

Посмотрим теперь, к каким именно теоремам проективной геометрии приводят **сизигии** между инвариантами Δ_{ik}. Снова берем за исходный пункт фундаментальную сизигию:

$$\Delta_{12}\Delta_{34} + \Delta_{13}\Delta_{42} + \Delta_{14}\Delta_{23} = 0,$$

делим ее на последнее слагаемое левой части и, принимая во внимание, что $\Delta_{23} = -\Delta_{32}$ и $\Delta_{42} = -\Delta_{24}$, находим:

$$\frac{\Delta_{12}\Delta_{34}}{\Delta_{14}\Delta_{32}} = 1 - \frac{\Delta_{13}\Delta_{24}}{\Delta_{14}\Delta_{23}}.$$

Здесь слева стоит согласно первоначальному определению двойное отношение точек *1,2,3,4*, а справа точно таким же образом составленное двойное отношение этих же четырех точек, но с обращением последовательности точек *2* и *3*; двойные отношения, соответствующие иному порядку точек, можно получить путем деления сизигии на другие члены. Таким образом фундаментальные сизигии между инвариантами, относящимися к любым четырем точкам, получают свое геометрическое истолкование в известных соотношениях между теми шестью значениями, какие может принимать двойное отношение этих четырех точек в зависимости от порядка их следования.

Я не намерен здесь говорить ни о том, какую форму принимает дальнейшее построение проективной геометрии прямой на этой основе, ни о толковании тернарной и кватернарной теории инвариантов в проективной геометрии плоскости и пространства; детальное изложение этого вы найдете, например, в уже названных мною курсах Сальмона-Фидлера и Клебша-Линдемана, которые непрерывно оперируют как раз этим толкованием теории инвариантов. Таким образом возникает систематика проективной геометрии, внутренне полная как относительно величин, которые можно в ней рассматривать (которые соответствуют инвариантам), так и относительно теорем, какие можно установить (соответственно сизигиям). Конечно, с точки зрения специалиста по теории инвариантов это толкование представляется менее удовлетворительным, чем для геометра; для первого данное в начале толкование в аффинной геометрии пространства R_{n+1} более ценно, так как в R_n имеют значение только те инварианты и сизигии, которые удовлетворяют упомянутому условию однородности.

Я хочу еще изложить более подробно только один особенно важный момент, чтобы затем снова примкнуть к прерванному ранее (стр. 226) ходу мыслей; а именно, я хотел бы показать, какой вид принимает благодаря применению теории инвариантов включение аффинной и метрической геометрии в схему проективной геометрии, ставшее возможным благодаря принципу Кэли.

4. Систематизация аффинной и метрической геометрии на основе принципа Кэли

Здесь речь идет, конечно, об общей аффинной геометрии, в которой отнюдь не существует фиксированной особенной точки — начала координат, — как это имело место при рассмотренном вначале полном истолковании теории инвариантов.

Станем рассматривать сразу же трехмерное пространство с неоднородными координатами x, y, z или, соответственно с однородными ξ, η, ζ, τ. Тогда принцип Кэли говорит, что аффинная геометрия получается из проективной, если к имеющимся образам каждый раз присоединять бесконечно удаленную плоскость $\tau = 0$, а метрическая геометрия получится, если, кроме того, присоединить мнимый круг сфер:

$$\tau = 0, \ \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 0.$$

Изложение дальнейшего можно облегчить при помощи такого замечания относительно этого круга сфер: мы определили его здесь посредством двух уравнений, как пересечение бесконечно удаленной плоскости и конуса, имеющего вершину вначале. Но мы можем также определить его, как и вообще всякое коническое сечение, посредством одного только уравнения в плоскостных координатах, если рассматривать его как огибающий образ всех касающихся его плоскостей. Если обозначить, как это мы делали под конец, „плоскостные координаты", т. е. коэфициенты линейной формы φ, буквами α, β, γ, то уравнение круга сфер получает, как нетрудно убедиться, такой вид:

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 0.$$

Другими словами, это уравнение является условием того, что плоскость $\alpha\xi + \ldots + \delta\tau = 0$ касается круга сфер. Теперь уж нетрудно понять, в чем состоит с точки зрения теории инвариантов переход от проективной к аффинной и соответственно к метрической геометрии: к заданным системам значений — координатам точек, линейным и квадратичным формам и т. д., — которые служат для описания рассматриваемой фигуры, присоединяем еще определенную линейную форму τ (т. е. систему коэфициентов 0, 0, 0, 1) или, соответственно, квадратичную форму $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2$, написанную в плоскостных координатах. Трактуя расширенную таким путем систему форм точно таким же образом, как и раньше, т. е. устанавливая полную систему ее инвариантов и сизигий между ними и выделяя те из них, которые удовлетворяют условию однородности, мы получим все понятия и теоремы аффинной или соответственно метрической геометрии первоначально данных элементов. Вместе с этим связанная с теорией инвариантов систематика переносится на аффинную и метрическую геометрию, и я бы хотел снова указать на то (ср. стр. 243), что таким образом, в частности путем подчеркивания образования целых рациональных инвариантов и сизигий, в геометрию вводится некоторая систематизирующая точка зрения, которая без этого остается почти незамеченной.

Вместо абстрактных рассуждений на эту тему я лучше сразу же разъясню и эти отношения на простых примерах тем, что я действительно покажу, как можно самые элементарные основные величины аффинной и метрической геометрии представить в виде совместных инвариантов как данной системы величин, так и формы τ или соответственно $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2$.

Из области аффинной геометрии я возьму прежде всего в качестве примера объем T тетраэдра, образованного четырьмя точками, который выражается, как известно, следующим образом:

$$T=\frac{1}{6}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1\\ x_2 & y_2 & z_2 & 1\\ x_3 & y_3 & z_3 & 1\\ x_4 & y_4 & z_4 & 1\end{vmatrix}=\frac{1}{6\,\tau_1\tau_2\tau_3\tau_4}\begin{vmatrix} \xi_1 & \eta_1 & \zeta_1 & \tau_1\\ \xi_2 & \eta_2 & \zeta_2 & \tau_2\\ \xi_3 & \eta_3 & \zeta_3 & \tau_3\\ \xi_4 & \eta_4 & \zeta_4 & \tau_4\end{vmatrix}.$$

Мы должны исследовать, насколько это выражение обладает упомянутым инвариантным свойством. Прежде всего нам известно, что фигурирующий здесь определитель действительно является фундаментальным относительным инвариантом четырех точек — вершин тетраэдра. Но, с другой стороны, в знаменателе стоят значения (для этих четырех точек) линейной формы τ, присоединенной к нашей фигуре, а это ведь простейшие (абсолютные) инварианты, какие только вообще можно образовать с помощью некоторой формы. Разумеется, это надо понимать в том смысле, что после преобразования в знаменателе следует написать значения той формы, в какую переходит линейная форма τ, или что в случае присоединения вообще формы $\alpha\xi + \beta\eta + \gamma\zeta + \delta\tau$ в знаменатель должно войти произведение четырех значений этой формы для точек *1*,..., *4*. Таким образом T представляет само также некоторый рациональный инвариант, а именно, он однороден, нулевого измерения, относительно координат каждой из четырех точек. По отношению к коэфициентам нашей присоединенной линейной формы 0, 0, 0, 1 или соответственно α, β, γ, δ, которые входят в знаменатель, T имеет во всяком случае измерение —4; поэтому ввиду произвольности общего множителя этих величин, абсолютное значение T в проективной геометрии нашей расширенной фигуры не может иметь никакого значения.

В действительности в аффинной геометрии на первых порах тоже нет никакого средства, которое позволило бы приписать тетраэдру определенное цифровое значение объема, если только заранее не были установлены единичные отрезки или соответственно единичный тетраэдр, что мы всегда допускали при пользовании неоднородными координатами. Но с нашей теперешней общей точки зрения это означало бы, что мы присоединяем к фигуре, сверх „бесконечно удаленной плоскости“ $\tau = 0$, еще дальнейшие элементы. Присоединяя, например, пятую точку и образуя частное двух выражений, составленных аналогично T, получаем действительно выражение, которое удовлетворяет всем условиям однородности и представляет поэтому также некоторый абсолютный инвариант аффинной геометрии. А отдельное выражение T является просто относительным инвариантом веса 1.

Теперь представляется уместным еще раз окинуть взглядом ход идей первого отдела, внутренняя суть которых теперь раскрывается яснее. В том, что грассмановы элементарные величины геометрии, выведенные нами там, принадлежат исключительно аффинной геометрии, в этом мы убедились уже при специальном изучении аффинных преобразований (стр. 123 и сл.). Но грассманов принцип определителей, который доставил нам упомянутые величины, отнюдь не является — это мы можем теперь добавить — каким-то непонятным ухищрением, но представляет попросту вполне естественное применение теории инвариантов в аффинной геометрии, т. е. в проективной геометрии с присоединением бесконечно удаленной плоскости. Появление на сцену обыкновенных определителей — отрезок, площадь, объем — уже достаточно выяснено только-что разобранным примером. Остается еще только показать, как систематика теории инвариантов приводит к общим грассмановым элементарным величинам, определяемым при помощи миноров прямоугольных матриц. Это в свою очередь можно лучше всего выяснить на примере: даны две точки ξ_1, η_1, τ_1; ξ_2, η_2, τ_2 в плоскости и требуется образовать эквивалент, в смысле теории инвариантов, принадлежащих этим точкам образов аффинной геометрии (линейный элемент, прямая, ...).

Это можно немедленно поставить в связь с вышесказанным, если присоединить третью „неопределенную" точку ξ, η, τ и если снова рассматривать фундаментальный инвариант:

$$\frac{1}{\tau\tau_1\tau_2}\begin{vmatrix} \xi & \eta & \tau \\ \xi_1 & \eta_1 & \tau_1 \\ \xi_2 & \eta_2 & \tau_2 \end{vmatrix}$$

как линейную форму относительно ξ, η, τ. Три коэфициента при этих переменных, т. е. определители матрицы:

$$\frac{1}{\tau_1\tau_2}\begin{vmatrix} \xi_1 & \eta_1 & \tau_1 \\ \xi_2 & \eta_2 & \tau_2 \end{vmatrix} \quad \text{или} \quad \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix},$$

являются таким образом величинами, характеризующими вновь определенный образ; это нас действительно приводит как раз к матрице, применявшейся раньше для определения линейного элемента 12. Точно таким же образом можно в пространстве образовать относительно инвариантную, линейную или соответственно билинейную форму из трех или соответственно из двух точек адъюнкции одной или соответственно двух четверок неопределенных координат, причем коэфициенты полученной формы доставят в полном согласии с нашим старым определением координаты плоскостного элемента или соответственно пространственного линейного элемента. Я не имею возможности развить здесь более подробно эти указания, но они будут достаточны, надеюсь, для первоначальной ориентировки и должны побудить вас к дальнейшим собственным размышлениям.

Представляется более важным поставить теперь, после того как мы включили принцип Грассмана в теорию инвариантов, вопрос о его продуктивности и, в частности, сравнить его в этом смысле с тем принципом классификации, который был высказан (стр. 222 и сл.) для особенного случая главной группы и доставил нам там все основные геометрические образы. Рациональное распространение этого принципа классификации на случай любой линейной группы преобразований напрашивается само собой. А именно, мы будем согласно этому принципу в каждой „геометрии" наряду с отдельными целыми рациональными функциями данных рядов величин (координат, коэфициентов, форм и т. д.), которые до сих пор поставляли нам инварианты, рассматривать также системы таких функций $\Xi_1, \Xi_2, \ldots$ Если подобная система при всех подстановках соответствующей группы преобразовывается сама в себя, т. е. если аналогичным образом составленные функции $\Xi_1', \Xi_2', \ldots$ преобразованных рядов величин выражаются линейно через одни только $\Xi_1, \Xi_2, \ldots$ с помощью коэфициентов, которые получаются однозначно определенным образом из коэфициентов положенного в основу преобразования, то говорим, что эта система определяет некоторый образ соответствующей геометрии. Отдельные функции, из которых состоит система, называются компонентами образа. Решающим признаком для природы геометрического образа является поведение его компонент по отношению к преобразованию группы, положенной в основу. Мы будем считать два геометрических образа принадлежащими к одному и тому же виду, если их компоненты образуют две серии из одинакового числа выражений, которые при замене координат испытывают одну и ту же линейную постановку, будучи, таким образом, когредиентными согласно нашему прежнему обозначению. Если система функций, определяющая геометрический образ состоит из одной только функции, то линейная подстановка сводится к умножению на некоторый множитель, а функция является относительным инвариантом.

Эти абстрактные вещи я хочу разъяснить на простом примере из теории инвариантов тернарной области, которую мы будем интерпретировать в аффинной геометрии трехмерного пространства при неподвижном начале. Если даны две точки ξ_1, η_1, τ_1; ξ_2, η_2, τ_2, то простейшей системой функций, в которой обе тройки координат входят однородным и симметричным образом, является система из девяти билинейных членов:

$$\xi_1 \xi_2, \xi_1 \eta_2, \xi_1 \tau_2, \eta_1 \xi_2, \ldots, \tau_1 \tau_2. \tag{1}$$

В случае линейного преобразования в наших обычных обозначениях (см. стр. 227) получаем:

$$\begin{aligned} \xi_1' \xi_2' &= a_1^2 \xi_1 \xi_2 + a_1 b_1 (\xi_1 \eta_2 + \eta_1 \xi_2) + \ldots + d_1^2 \tau_1 \tau_2, \\ \xi_1' \eta_2' &= a_1 a_2 \xi_1 \xi_2 + a_1 b_2 \xi_1 \eta_2 + a_2 b_1 \eta_1 \xi_2 + \ldots + d_1 d_2 \tau_1 \tau_2, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \tau_1' \tau_2' &= a_4^2 \xi_1 \xi_2 + a_4 b_4 (\xi_1 \eta_2 + \eta_1 \xi_2) + \ldots + d_4^2 \tau_1 \tau_2, \end{aligned} \tag{2}$$

т. е. эти девять величин действительно образуют систему только что исследованного типа, так что мы будем их рассматривать как определяющие элементы некоторого образа нашей аффинной геометрии; этот образ и вообще всякую систему, состоящую из девяти величин, которые преобразовываются согласно уравнениям (2), в последнее время называют тензором.

Рассматривая уравнения (2), нетрудно заметить, что из девяти величин (1) можно вывести, с одной стороны, шесть, а с другой стороны, три простые линейные комбинации, переходящие друг в друга путем линейной подстановки. Если представить себе величины (1) расположенными в виде системы, имеющей форму квадрата:

$$\begin{matrix} \xi_1\,\xi_2 & \xi_1\,\eta_2 & \xi_1\,\tau_2 \\ \eta_1\,\xi_2 & \eta_1\,\eta_2 & \eta_1\,\tau_2 \\ \tau_1\,\xi_2 & \tau_1\,\eta_2 & \tau_1\,\tau_2, \end{matrix}$$

то этими комбинациями будут, во-первых, суммы членов, расположенных симметрично относительно диагонали:

$$2\xi_1\xi_2,\ \xi_1\eta_2+\eta_1\xi_2,\ \xi_1\tau_2+\tau_1\xi_2,\ldots,\ 2\tau_1\tau_2, \tag{3}$$

а во-вторых, разности тех же членов:

$$\xi_1\eta_2-\eta_1\xi_2,\ \xi_1\tau_2-\tau_1\xi_2,\ \eta_1\tau_2-\tau_1\eta_2. \tag{4}$$

Формулы подстановок для систем величин (3) и (4) получаются непосредственно из уравнений (2). Это дает нам два новых образа нашей аффинной геометрии; из них образ, состоящий из шести величин (3), называют *симметричным тензором*, а образ, состоящий из трех величин (4), является уже знакомой нам *плоскостной величиной*. Указанное название прилагается, конечно, опять-таки ко всякой системе величин, которая преобразовывается когредиентным образом. Оправдание прилагательного „симметричный“ мы дадим немного позже.

Геометрическое значение трех величин (4) нам известно (ср. стр. 59): это — удвоенные проекции на координатные плоскости треугольника, образуемого точками ξ_1, η_1, τ_1; ξ_2, η_2, τ_2 и началом координат, с надлежащим направлением обхода; мы здесь имеем как раз один из первых образов, доставляемых грассмановым принципом определителей. Можно вообще высказать такое предложение: *систематическое разыскивание образов аффинной геометрии* с помощью нашего классификационного принципа приводит, между прочим, с необходимостью *к грассманову принципу определителей* и к устанавливаемым с его помощью геометрическим образам. Разумеется, я не могу входить здесь во все детали; ограничусь указанием на то, что можно получить все ранее рассмотренные образы, трактуя совершенно аналогичным образом общую аффинную геометрию на основании принципа Кэли с помощью кватернарной теории инвариантов (ср. стр. 248 и сл.).

Но важным результатом нашего исследования является установление того факта, что грассманов принцип определителей представляет нечто специальное и сам по себе отнюдь не доставляет всех образов аффинной геометрии. Напротив того, в тензорах (1) и (3) мы имеем существенно новые геометрические образы.

Ради большого значения этих образов для многих областей физики, как, например, для учения об упругих деформациях и для теории относительности, скажем еще несколько слов о них. Прежде всего сделаем несколько замечаний, которые относятся к названию этих геометрических величин и должны помочь читателю ориентироваться в новейшей литературе по тензорному исчислению.

Слово „тензор" мы употребляли в первом томе этого сочинения при изложении гамильтонова исчисления кватернионов в другом смысле, чем теперь. Если $q = a + bi + cj + dk$ представляет некоторый кватернион, то мы называли тогда выражение $T = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}$ его тензором. Это название, введенное Гамильтоном, оправдывается тем, что умножение на кватернион можно истолковать геометрически [что было подробно разъяснено в первом томе, стр. 96 (108) и сл.] как поворотное растяжение при неподвижном начале координат. При этом в качестве мерила растяжений фигурирует как раз радикальное выражение называемое тензором. В тесной связи с этим находится употребление термина „тензор" в работах Фохта (W. Voigt) по кристаллофизике[1]). Фохт обозначает этим словом направленные величины, которые соответствуют таким процессам, как продольное растяжение или сжатие прямолинейного стержня, к обоим концам которого приложены силы, действующие вдоль оси стержня в прямо противоположные стороны. Подобный тензор можно было бы наглядно изобразить отрезком

[1]) Ср., например, работы, напечатанные в Göttinger Nachrichten 1900: a) „Der gegenwärtige Stand unserer Kenntnisse der Kristallelastizität"; b) „Über die Parameter der Kristallphysik und über gerichtete Grössen höherer Ordnung".

со стрелками на обоих концах, направленными в разные стороны (смотри рис. 100).

Характер направленности так понимаемого тензора можно обозначить термином „двусторонний“, а для вектора, в противоположность этому, употреблять слово „односторонний“. В физике такие тензоры часто фигурируют как **тензорные тройки**, т. е. по три и со взаимно ортогональными направлениями (рис. 101). Мы познакомились раньше (ср. стр. 128) с чистой однородной деформацией (чистым аффинным преобразованием), как с равномерным растяжением пространства по трем взаимно перпендикулярным направлениям, которое оставляет начало координат на месте. Вместо этого мы можем сказать теперь так: чистая однородная деформация изображается геометрически тензорной тройкой. Часто употребляемое теперь значение слова „тензор“ мы получим, если станем рассматривать совокупность таких трех растяжений пространства, как **одну** геометрическую величину, и, опуская слово „тройка“, будем обозначать **эту именно** величину словом тензор. Рассматриваемое в таком смысле понятие тензора в точности совпадает с тем понятием, которое мы выше обозначили термином „симметричный тензор“. Действительно, чистая однородная деформация, не изменяющая положения начала координат, изображается подстановками такой структуры:

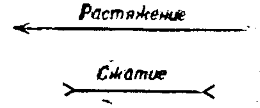

Рис. 100.

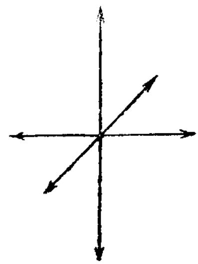

Рис. 101.

$$\left.\begin{aligned} \xi &= a_{11}\,x + a_{12}\,y + a_{13}\,z, \\ \eta &= a_{12}\,x + a_{22}\,y + a_{23}\,z, \\ \tau &= a_{13}\,x + a_{23}\,y + a_{33}\,z, \end{aligned}\right\} \quad (a_{ik} = a_{ki}). \qquad (5)$$

Здесь числовые тройки x, y, z; ξ, η, τ можно толковать как точечные координаты в одной и той же системе прямоугольных координат. Схема коэфициентов (матрица) этого преобразования симметрична относительно главной диагонали. Если теперь перейти к новой системе прямоугольных координат, сохраняя старое начало, то получим, как показывает простое вычисление (для перехода от x, y, z к x', y', z' и от ξ, η, τ к ξ', η', τ' служат соответственно одни и те же формулы), следующее новое изображение рассматриваемой деформации:

$$\left.\begin{aligned} \xi' &= a'_{11} x' + a'_{12} y' + a'_{13} z', \\ \eta' &= a'_{12} x' + a'_{22} y' + a'_{23} z', \\ \tau' &= a'_{13} x' + a'_{23} y' + a'_{33} z', \end{aligned}\right\} \quad (a'_{ik} = a'_{ki}). \qquad (6)$$

При этом относительно шести коэфициентов $a'_{11}, a'_{12}, \ldots a'_{24}$ оказывается:

1) что они линейно зависят от шести коэфициентов $a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{33}$ и только от них, определяя, таким образом, некоторую геометрическую величину;

2) что они, в частности, преобразовываются точно так же, как и билинеарные относительно координат выражения (3), которые мы назвали (стр. 252) компонентами симметричного тензора.

Прилагательное „симметричный“ оправдывается структурой схемы коэфициентов формул преобразований (5), (6).

Переходя теперь к общему аффинному преобразованию, сохраняющему начало координат:

$$\begin{aligned} \xi &= a_{11} x + a_{12} y + a_{13} z, \\ \eta &= a_{21} x + a_{22} y + a_{23} z, \\ \tau &= a_{31} x + a_{32} y + a_{33} z, \end{aligned} \qquad (7)$$

находим, совершенно аналогично предыдущему, что в геометрии ортогональных преобразований девять коэфициентов $a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{23}$ преобразовываются таким же точно образом, как девять произведений координат (1), и представляют поэтому компоненты некоторой величины такого же рода, как и эти последние. При принятой нами терминологии, согласно которой употребление слова „тензор“ не ограничивается исключительно чистыми однородными деформациями, это означает следующее: схема коэфициентов общего аффинного преобразования представляет собой некоторый тензор.

В литературе встречается еще большое число других названий для этого понятия. Вот некоторые из наиболее часто употребляемых:

1) аффинор (по причине связи с аффинными преобразованиями);

2) линейная вектор-функция [так как линейные подстановки (7) можно истолковать в том смысле, что ими с любым вектором x, y, z, исходящим из начала координат, сопрягается линейным образом подобный же вектор ξ, η, τ];

3) диада и диадик; впрочем, первое из этих двух слов употреблялось первоначально только для одного особенного ниже рассматриваемого случая.

Компоненты плоскостной величины (4) тоже можно рассматривать как коэфициенты некоторого преобразования, а именно одного из преобразований следующего вида:

$$\left.\begin{aligned} \xi &= 1\cdot x - c\cdot y + b\cdot z, \\ \eta &= c\cdot x + 1\cdot y - a\cdot z, \\ \tau &= b\cdot x + a\cdot y + 1\cdot z. \end{aligned}\right\| \qquad (8)$$

Действительно, коэфициенты этой подстановки ведут себя, как нетрудно убедиться, по отношению к преобразованию прямоугольных координат так же, как и билинеарные выражения (4). По причине характера структуры схемы коэфициентов формул (8) (симметрия относительно главной диагонали с переменой знака) определяемую ими величину называют также антисимметричным тензором.

С геометрической точки зрения, как известно, формулы (7) допускают толкование в смысле общей однородной деформации, формулы (6) — в смысле чистой (без вращения) деформации, а формулы (8) — в смысле бесконечно малого вращения. Таким образом тому формальному процессу, при помощи которого мы вывели (стр. 250) из произведений координат (1) симметричный тензор (3) и антисимметричный тензор (4), в наглядном представлении соответствует разложение однородной бесконечно малой деформации на чистую деформацию и на вращение.

До сих пор мы ограничивались при перемене системы координат одними только ортогональными преобразованиями. Остается дать некоторые дополнительные указания, относящиеся к тому случаю, когда переходят от прямоугольной системы координат к косоугольной или когда вообще с самого начала вводят ξ, η, τ: x, y, z, как косоугольные параллельные координаты. (Ограничение, требующее неподвижности начала координат, остается и здесь в силе). Этим мы переходим от геометрии главной группы к геометрии аффинной группы. Изучение поведения коэфициентов подстановки (7) для этой группы по отношению к преобразованиям координат показывает, что хотя они тоже изображают компоненты некоторой геометрической величины, но что они преобразовываются не так, как произведения координат (1), но контрагредиентно по отношению к ним. Аналогично обстоит с коэфициентами преобразований (6) и (8). Можно показать, что один и тот же тензор (например, одна и та же однородная деформация) может быть задан по отношению к некоторой системе параллельных координат как посредством компонент вида (1), так и при помощи компонент вида коэфициентов (7). Первые называют „когредиентными", а последние „контрагредиентными" компонентами тензора. Вместо „когредиентный" и „контрагредиентный" часто говорят еще „контравариантный" и „ковариантный".

Иногда последние два термина употребляют как раз наоборот (один вместо другого). Различие между обоими видами компонент такое же, как между точечными и плоскостными координатами.

Другое толкование значения слова „тензор", много более общее сравнительно с тем его значением, какому мы отдали предпочтение, станет понятным, если сперва исследовать поведение однородных форм по отношению к перемене координат. На стр. 230 мы уже провели это исследование для случая квадратичной формы (пользуясь несколько отличными обозначениями):

$$a_{11}\xi^2 + 2a_{12}\xi\eta + \ldots + a_{33}\tau^2.$$

Мы нашли, что коэфициенты формы $a_{11}, 2a_{12}, \ldots, a_{33}$ испытывают линейно-однородное и контрагредиентное преобразование по отношению к членам $\xi^2, \xi\eta, \ldots, \tau^2$ точечных координат. А эти последние преобразовываются, как непосредственно видно, когредиентно к выражениям (3). Этот результат можно высказать в такой форме: коэфициенты $a_{11}, 2a_{12} \ldots, a_{33}$ квадратичной формы являются контрагредиентными, а члены $\xi^2, \xi\eta, \ldots, \tau^2$ — когредиентными компонентами некоторого симметричного тензора. Аналогично обстоит и с любой билинейной формой. О последней говорят по примеру Гиббса, что она определяет собой, в частности, некоторую *диаду*, если удается записать ее в виде произведения двух линейных форм. Имея *однородную n-кратно-линейную форму* точечных координат, можно с помощью несложного вычисления показать, что ее коэфициенты тоже подвергаются однородной и линейной подстановке, а именно контрагредиентно по отношению к соответственным членам точечных координат.

Обобщение понятия о тензоре, о котором мы только что говорили, состоит в том, что всякую подобную величину называют тензором и применяют это название не только в связи с билинейными формами, как это мы делали до сих пор. В этом общем значении слово „тензор" стали применять, в особенности Эйнштейн (Einstein) и его ученики. Прежде вместо этого говорили о линейных, квадратичных, билинейных, трилинейных, кубических и т. п. *формах*.

К различению терминов на практике присоединяется еще стремление обозначать систему компонент какого-нибудь тензора *одною только* буквою и указывать вычисления с тензорами посредством символического сочетания фигурирующих одна рядом с другой таких букв. Все эти вещи сами по себе очень просты и затрудняют читателя только по той причине, что разные авторы пользуются различными способами обозначений. Здесь мы встречаемся в еще большей степени с теми же неудобствами, которые мы уже отмечали в связи с векторным исчислением и которые, повидимому, невозможно совершенно устранить. Но мы не могли не упомянуть об этих неудобствах, так как вся современная литература страдает от них.

Теперь я перейду к метрической геометрии, причем и здесь я выхвачу только несколько характерных примеров. Я покажу, как можно вывести из систематики теории инвариантов оба важнейшие основные понятия: „расстояние r между двумя точками $x = \frac{\xi_1}{\tau_1}$ и $x_2 = \frac{\xi_2}{\tau_2} \ldots$“ и „угол ω между двумя плоскостями $\alpha_1 \ldots, \delta_1$, и $\alpha_2 \ldots, \delta_2$“.

Согласно известным формулам аналитической геометрии имеем:

$$r = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2} =$$

$$= \sqrt{\frac{(\xi_1\tau_2 - \xi_2\tau_1)^2 + (\eta_1\tau_2 - \eta_2\tau_1)^2 + (\zeta_1\tau_2 - \zeta_2\tau_1)^2}{\tau_1^2\tau_2^2}},$$

$$\omega = \arccos\left(\frac{\alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2 + \gamma_1\gamma_2}{\sqrt{(\alpha_1^2+\beta_1^2+\gamma_1^2)(\alpha_2^2+\beta_2^2+\gamma_2^2)}}\right).$$

Это — алгебраические, соответственно трансцендентные функции параметров; мы будем вправе обозначать их названием „алгебраические“, соответственно „трансцендентные“ инварианты, если мы покажем, что те рациональные целые составные части, из которых они построены, уже сами по себе являются инвариантами в прежнем смысле слова.

Начнем с угла ω. Та фигура, инвариантом которой он должен быть, состоит из двух линейных форм:

$$\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \delta_1, \quad \text{и} \quad \alpha_2, \beta_2, \gamma_2, \delta_2,$$

и из квадратичной формы в плоскостных координатах, изображающей круг сфер:

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 0 \cdot \delta^2.$$

Из этой квадратичной формы в плоскостных координатах мы можем, конечно, образовывать инварианты точно таким же образом, как раньше (стр. 226 и сл.) из форм в точечных координатах, но только обменивая („дуализируя“) каждый раз точечные и плоскостные координаты. В частности оказываются инвариантными значения формы для обеих заданных систем значений:

$$\alpha_1^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2 + 0 \cdot \delta_1^2 \quad \text{и} \quad \alpha_2^2 + \beta_2^2 + \gamma_2^2 + 0 \cdot \delta_2^2,$$

как и образованное для этих двух систем значение их полярной формы:

$$\alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2 + \gamma_1\gamma_2 + 0 \cdot \delta_1\delta_2,$$

из каковых выражений как раз и составляется фактически $\cos\omega$. Впрочем, $\cos\omega$ оказывается **однородным нулевого измерения** относительно каждой из двух систем значений $\alpha_1, \ldots, \delta_1$, и $\alpha_2, \ldots, \delta_2$, а также относительно коэфициентов 1, 1, 1, 0 заданной квадратичной формы, так что это выражение имеет в метрической геометрии самостоятельное значение. Ведь фактически в метрической геометрии тоже имеется абсолютная мера углов, не зависящая от произвольного выбора единицы измерения. Этим самым одновременно сказано, что наше выражение является **абсолютным инвариантом**.

Что же касается, далее, расстояния r, то следует вспомнить, что мы составляли инварианты квадратичной формы в точечных координатах путем окаймления ее определителя координатами одной из двух плоскостей (стр. 227 и сл.). Таким же образом мы и теперь получим инварианты для нашей фигуры, которая состоит из квадратичной формы в плоскостных координатах и из двух точек, тем, что мы, поступая в точности взаимным (дуальным) образом, окаймляем определитель формы $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 0 \cdot \delta^2$:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

один или два раза координатами $\xi_1, \ldots, \tau_1$ и $\xi_2, \ldots, \tau_2$ данных точек. Из полученных таким образом инвариантов составляем частное:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \xi_1 & \xi_2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \eta_1 & \eta_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \zeta_1 & \zeta_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \tau_1 & \tau_2 \\ \xi_1 & \eta_1 & \zeta_1 & \tau_1 & 0 & 0 \\ \xi_2 & \eta_2 & \zeta_2 & \tau_2 & 0 & 0 \end{vmatrix} : \left\{ \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \xi_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \eta_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \zeta_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \tau_1 \\ \xi_1 & \eta_1 & \zeta_1 & \tau_1 & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \xi_2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \eta_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \zeta_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \tau_2 \\ \xi_2 & \eta_2 & \zeta_2 & \tau_2 & 0 \end{vmatrix} \right\}$$

Вычисляя эти три определителя, нетрудно найти, что это частное в точности равно вышеуказаному значению, чем и доказывается его инвариантная природа. Впрочем, подобно ранее рассмотренному фундаментальному инварианту аффинной геометрии, это частное, конечно, является однородным нулевого измерения относительно координат обеих точек, но не по отношению к коэфициентам заданной квадратичной формы, относительно которых оно оказывается однородным измерения — 4. К тому же оно не представляет собою абсолютного инварианта, так как каждый из трех входящих в его состав определителей имеет вес $+2$ (ввиду того, что здесь мы имеем дело со взаимными образованиями по сравнению с инвариантами, рассмотренными на стр. 227 и сл.), так что частное имеет вес $2-4=-2$. Вследствие этого числовое значение r само по себе не имеет в метрической геометрии непосредственного значения, и действительно, к измерению расстояния двух точек можно приступить лишь после того, как еще один отрезок (единица) произвольно фиксирован, иными словами, дополнительно присоединен к фигуре наряду с фундаментальной квадратичной формой. Абсолютные инварианты метрической геометрии могут быть изображены только с помощью отношений (частных), составленных из выражений указанного вида.

Здесь я тоже не имею возможности входить в рассмотрение дальнейших подробностей, но эти примеры дадут вам, по крайней мере, приблизительное представление о том, как выглядит возникающая здесь полная систематика аффинной и метрической геометрии, вырастающая из систематической классификации целых рациональных инвариантов. Желательно, чтобы вы ознакомились более обстоятельно с этими вещами по много раз названным книгам [1]).

---

[1]) Здесь следует в особенности указать на работу Буркгарта (H. Burkhardt) в 43 т. (1893) журнала „Mathematische Annalen", „Über Funktionen von Vektorgrössen, welche selbst wieder Vektorgrössen sind. Eiene Anwendung invariantentheoretischer Methoden auf eine Frage der mathematischen Physik" („О функциях векторных величин, которые сами тоже являются векторными величинами. Приложение методов теории инвариантов к одному вопросу математической физики").

Я хотел бы коснуться еще одного маленького примера, который, впрочем, подробно разобран также в новом издании Клебша-Линдемана [1]), я имею в виду так называемую геометрию треугольника. Здесь с течением времени возникла большая замкнутая область, в особенности благодаря трудам ряда учителей гимназий, которая трактует о многих замечательных точках, прямых, кругах, какие можно определить в треугольнике: центр тяжести, высоты, биссектрисы, вневписанные круги, описанный круг, круг Фейербаха и т. д. и т. д. Бесчисленные соотношения, которые всегда снова и снова старались здесь найти и теперь еще стараются находить, очень легко можно увязать с нашей систематикой: даются три точки ξ_1, η_1, τ_1; ξ_2, η_2, τ_2; ξ_3, η_3, τ_3 на плоскости (рис. 102) в качестве вершин треугольника, и мы к ним присоединяем (адъюнгируем), так как речь идет исключительно о метрических соотношениях, обе

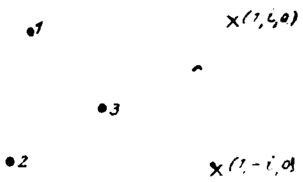

Рис. 102.

мнимые циклические точки, выражаемые в координатах прямой уравнением $\alpha^2+\beta^2=0$; впрочем, мы могли бы попросту присоединить значения $1, i, 0$ и $1, -i, 0$ их точечных координат. Тогда вся геометрия треугольника оказывается не чем иным, как проективной теориией инваринатов этих пяти точек, т. е. в конце концов пяти произвольных точек на плоскости, две из которых, однако, словесно выделяются (особыми терминами). Только благодаря этому замечанию геометрия треугольника приобретает характер прозрачной систематической дисциплины, которого иначе в ней не замечают.

На этом я заканчиваю обзор систематики геометрии. Несомненно, что размещение всех этих вещей описанным здесь образом доставляет эстетическое удовлетворение; а так как к тому же только такая систематика позволяет достичь более глубокого понимания геометрии, то,

[1]) См. в указанной книге стр. 321. Кроме того, следует назвать на первом месте статью Berkhana-Meyer'a „О новой геометрии треугольника", Энциклопедия математических наук (III, A. B. 10).

конечно, каждый математик, каждый кандидат на учительскую должность должен бы быть знаком с ней. Вот почему мне казалось необходимым включить ее в этот курс, тем более, что вам и без того часто придется встречаться в литературе с таким пониманием геометрии, хотя и не всегда, быть может, в столь последовательном изложении. Конечно, было бы прямым извращением нашей мысли, если бы кто-нибудь захотел догматически связывать себя этой систематикой и стал бы всегда изображать геометрию только в такой схеме; ибо тогда она очень скоро наскучила бы и потеряла бы всякую прелесть и прежде всего стала бы помехой для нового творческого мышления, которое ведь всегда развивается независимо от всякой систематики.

Если вышеизложенные рассуждения касались как бы архитектуры геометрического здания, то теперь мы обратимся к его не менее важным основаниям.

II. ОСНОВАНИЯ ГЕОМЕТРИИ

Обзор крайне обширной области, в которую мы теперь вступаем, дает статья Энриквеса (F. Enriques). „Принципы геометрии" в Энциклопедии математических наук (Enz. III, A. B. 1). Исследования относительно оснований геометрии во многих случаях сталкиваются с интересами теории познания и психологии, которые сами исследуют вопрос о том, как возникает пространственная интуиция, и о том, вправе ли мы пользоваться математическими методами для ее изучения.

Конечно, здесь мы можем затронуть эти вопросы лишь совершенно вскользь, а главным образом, будем изучать *математическую сторону проблемы*, рассматривая при этом пространственную интуицию как нечто данное. В частности, мы должны будем оставить в стороне также и столь важный для педагогики вопрос о том, как у отдельного индивидуума пространственная интуиция развивается в ту строгую форму, к которой привыкли мы как математики.

Будучи так ограничена, наша задача заключается в том, чтобы *возвести все здание геометрии на возможно более простом основании при по-*

мощи логических операций. Конечно, чистая логика не может доставить нам этого основания; логическая дедукция может начать функционировать лишь с того момента, когда решена первая часть проблемы, т. е. когда уже обладают системой некоторых простых основных понятий и некоторых простых предложений, так называемых аксиом, которая учитывает простейшие факты нашей интуиции. Разумеется, эти аксиомы можно в зависимости от вкуса расчленять более или менее детально на отдельные взаимно независимые составные части, да и в других отношениях при их выборе имеется еще большая доля свободы. Ведь единственное условие, которому должна удовлетворять система аксиом, дается второй частью нашей задачи: из упомянутых основных понятий и аксиом дожно быть возможно вывести логически все содержание геометрии, не имея надобности снова апеллировать к интуиции.

Что касается способа трактовки этой задачи, то весь уклон нашего курса указывает нам на определенный характерный путь. До сих пор мы ведь постоянно пользовались принципиально помощью анализа, в частности, методами аналитической геометрии. Так и здесь мы снова будем предполагать известным анализ и заладимся лишь вопросом, как можно наикратчайшим образом от той или иной системы аксиом притти к исходным моментам аналитической геометрии. К сожалению, эта простая формулировка применяется очень редко по той причине, что геометры часто относятся к применению анализа с некоторой пугливостью и насколько только возможно стараются обходиться без чисел.

Намеченную в общих чертах программу можно осуществить различными путями в зависимости от того, какие именно основные понятия и аксиомы желают выдвинуть на первое место. Часто практикуется — и это представляет известные удобства — ставить во главу всего исследования основные понятия проективной геометрии, а именно: точку, прямую и плоскость, которые мы уже раньше (стр. 101) выдвинули в такой роли. При этом отнюдь не требуется давать определение того, что это за вещи, — это каждый должен знать заранее сам; должно быть лишь указано столько характерных для них свойств и взаимных соотношений, чтобы из них можно было вывести (в уточненном выше смысле) всю геометрию. Я не собираюсь перечислять здесь перед вами полностью отдельные, сюда относящиеся аксиомы, — это завело бы нас слишком далеко в сторону в этом нашем энциклопедическом курсе, а дам лишь настолько полную характеристику их содержания, чтобы вы получили о них ясное представление.

На первом месте стоят аксиомы сочетания, которые я уже (стр. 103) изложил для проективной геометрии. Однако здесь мы не требуем с самого начала, как это делали там, не допускающего исключений существования точки пересечения всяких двух прямых в одной плоскости или прямой пересечения всяких двух плоскостей, но в соответствии с непосредственными соотношениями метрической и аффинной геометрии ограничиваемся тем положением, что две прямые на плоскости либо имеют одну общую точку, либо не имеют таковой вовсе, и что две плоскости либо имеют общую прямую, либо не имеют ни одной общей точки. После этого всегда остается еще возможность перейти известным образом путем дополнительного присоединения „несобственных“ точек, прямых и плоскостей к полной системе проективной геометрии.

Далее идут аксиомы расположения; они описывают, какое взаимное положение могут занимать на плоскости и на прямой различные точки; например, из трех точек a, b, c на одной прямой всегда одна какая-нибудь, например b, лежит между двумя другими a и c и т. д.; эти аксиомы называют также сокращенно аксиомами понятия „между“ (Sätze des „Zwischen“, рис. 103).

Наконец, что касается свойств непрерывности, то здесь я отмечу пока лишь отсутствие пробелов у прямой: если отрезок между двумя точками a, b разделить как-либо на две части, 1, 2 таким образом, чтобы (если a лежит слева от b) все точки части 1 лежали слева от всех точек части 2, то всегда найдется такая точка c, которая вызывает это именно деление в том смысле, что между a и c лежат точки части 1, а между c и b — точки части *2*. Это соответствует, очевидно, вполне введению иррациональных чисел при помощи дедекиндовых сечений [1]).

Из этих аксиом действительно возможно вывести всю проективную геометрию пространства при помощи логической дедукции; в частности, конечно, можно очень скоро ввести известные координаты и перейти к аналитической разработке трактования проективной геометрии.

Чтобы перейти затем к метрической геометрии, надо прежде всего принять во внимание, что вместе с проективной геометрией мы получаем также понятие о групе ∞^{15} коллинеаций, или проективных преобразований пространства. Мы уже знаем, как можно охарактеризовать, в качестве ее подгруппы 7-параметровую главную группу пространственных изменений,— ту группу, теорией инвариантов которой и является метрическая геометрия: эта группа состоит из тех коллинеаций, при которых некоторая плоскость, а именно бесконечно удаленная плоскость, и на ней некоторая кривая второго порядка, а именно круг сфер (или соответственно изображающая его абсолютная полярная система) остаются без изменения.

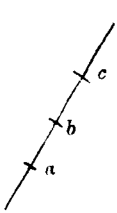

Рис. 103.

Приходится сделать еще один шаг дальше, если желательно получить в точности теоремы элементарной геометрии. Для этого должно выделить из главной группы 6-параметровую подгруппу собственных движений (сдвигов и вращений), которые в противоположность преобразованиям подобия оставляют совершенно неизменным расстояние двух точек и потому имеют своей теорией инвариантов метрическую геометрию конгруэнций (равенства при наложении). Эти движения можно выделить из главной группы, например, с помощью требования, чтобы все „траектории" какого-нибудь движения были замкнуты, если только оно оставляет неподвижной какую-нибудь точку.

Намеченное в таком виде построение геометрии является, пожалуй, теоретически самым простым, так как оно оперирует вначале (для проективной геометрии)

[1]) Ср. т. I, стр. 49 и сл.

исключительно линейными образами и лишь в дальнейшем, когда это становится необходимым для метрической геометрии, привлекает квадратичный образ — круг сфер. Но зато осуществление этого плана оказывается очень абстрактным и длинным и может найти место только в специальном курсе лекций по проективной геометрии. Здесь же будет достаточным, если я после этих общих рассуждений укажу еще вам на то изложение в литературе, которое представляется наиболее „читабельным", а именно на „Лекции по проективной геометрии" Энриквеса [1]).

Для целей общего преподавания мне представляется более подходящим другое построение геометрии, к которому я теперь и обращаюсь, ограничиваясь ради простоты геометрией на плоскости.

1. Построение геометрии на плоскости на основе движений

В качестве основных понятий принимаем точку прямую и вводим аксиомы об их сочетании, расположении и непрерывности. При этом аксиомы сочетания снова содержат лишь такие интуитивные факты: через любые две точки всегда проходит одна и только одна прямая, тогда как две прямые могут иметь либо одну общую точку, либо ни одной.

Относительно расположения точек на прямой мы сохраняем уже отмеченные выше требования; в процессе исследования нам еще придется остановиться на точной формулировке дальнейших аксиом расположения и аксиом непрерывности.

Исходя из этой основы, мы теперь непосредственно, минуя проективные соответствия, введем группу ∞^3 движений плоскости, чтобы с ее помощью достигнуть нашей настоящей цели — построения системы аналитической геометрии на плоскости. Для этого мы должны прежде всего дать в виде ряда аксиом абстрактную формулировку того, какие именно свойства этих „движений"

---

[1]) „Lezioni di geometria proiettiva", Bologna 1898; 3-е итал. изд., 1909. Существует немецкий перевод H. Fleischer, Vorlesungen über projektive Geometrie (1-е изд., 1903; 2-е изд., 1915).

мы будем предполагать и применять по отношению к системе точек и прямых. При этом мы, конечно, ориентируемся на то наглядное представление о движении, какое мы вынесли из нашего опыта с твердыми телами. Согласно последнему движение должно в первую голову быть взаимно однозначным преобразованием точек нашего пространства (следовательно, должно, в частности, сопрягать со всякой точкой некоторую точку, лежащую в конечном расстоянии) и затем должно переводить все без исключения прямые опять-таки в прямые. Представляется удобным для обозначения преобразования такого рода воспользоваться снова в общем случае словом коллинеация. Конечно, мы первоначально еще не знаем, существуют ли вообще подобные коллинеации, так как мы ведь не обладаем, как это было раньше, проективною геометриею. Поэтому мы должны явным образом постулировать в форме некоторой новой аксиомы существование, по крайней мере, этих специальных коллинеаций. Действительно, мы требуем, чтобы существовала группа определенных ∞^3 (троекратно-бесконечных) коллинеаций, которым мы даем название движений и в качестве теорий инвариантов которых следует рассматривать геометрию на плоскости. При этом необходимо также точнее охарактеризовать, что именно надо понимать под выражением „троекратно-бесконечный" (или ∞^3). Пусть даны какие-нибудь две точки A, A' (рис. 104) и два луча (или полупрямые): луч a, исходящий из точки A, и луч a' — из точки A'; в таком случае всегда должно существовать одно и только одно движение, переводящее точку A в A' и одновременно луч a в a' [1]). Фигуры,

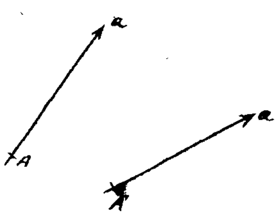

Рис. 104.

[1]) [При фиксированных A и a выбор точки A' обладает двумя „степенями свободы" или представляет ∞^2 возможностей (так как положение A' определяется двумя координатами, каждая из которых может иметь ∞^1 значений), а выбор луча a' обладает еще одной степенью свободы, представляя ∞^1 возможностей (значений угла от 0 до 2π). Итого, существует $\infty^2\infty^1 = \infty^3$ комбинаций A' с a' и столько же коллинеаций.]

переходящие при некотором движении одна в другую, мы называем **конгруэнтными**.

На первых парах мы не будем, однако, пользоваться существованием всей этой группы движений, а ограничимся применением только одного особого класса движений, относительно которого мы теперь введем еще некоторые специальные постулаты. А именно имеется одно и только одно движение, переводящее некоторую точку A в произвольно заданную точку A' и одновременно прямую, идущую от A к A' (с этим именно направлением), само в себя; такое движение называем **сдвигом**, также **переносным движением**, или **перенесением** (Verschiebung, Translation), или для большей ясности **параллельным сдвигом**. Так вот, мы требуем, чтобы вообще всякий подобный сдвиг переводил в само себя всякую прямую, соединяющую любые две взаимно соответствующие при этом сдвиге точки B и B', сохраняя ее направление (от B к B'), и далее, и это самое главное, чтобы все ∞^2 (двукратно-бесконечные) сдвиги плоскости образовывали подгруппу по отношению к группе движений.

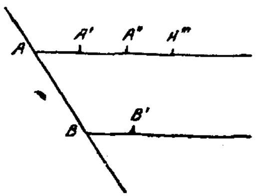

Рис. 105.

Если повторять несколько раз один и тот же сдвиг (рис. 105), то A будет переходить в точки A', A'', A''', полупрямой AA', направленной от A к A'; приходится прибавить в качестве дальнейшего постулата, что эти точки могут в конце концов достичь либо перешагнуть любую точку этой полупрямой. Путем повторения обратного преобразования получаем ряд точек такого же рода на другой полупрямой (т. е. на протяжении первой полупрямой AA' в противоположную сторону). Представляя себе, что всякий сдвиг из начального положения в конечное мы выполняем непрерывным образом, чем нам еще придется воспользоваться, мы называем рассматриваемую здесь прямую **траекторией** точки A при этом переносном движении. Тогда всякая прямая представится нам траекторией бесконечно многих точек и для всякого сдвига будет иметься ∞^1 подобных траекторий, а именно тех прямых, которые при этом сдвиге переходят сами в себя.

Две различные траектории одного и того же переносного движения не могут пересекаться; действительно, ведь иначе точка пересечения должна была бы при сдвиге получаться из двух различных точек, а именно лежащих по одной на каждой из траекторий, вопреки характеру переносного движения, как взаимно однозначного преобразования точек [1]). Всем траекториям одного и того же переносного движения даем название взаимно параллельных прямых. Таким образом мы вводим это понятие, исходя из некоторого свойства наших движений. В то же время представляется очевидным, что через каждую точку A проходит во всяком случае хоть одна прямая, параллельная по отношению к прямой a, а именно траектория точки A при сдвиге (плоскости) вдоль заданной прямой a.

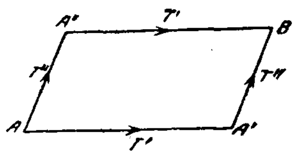

Рис. 106.

Наконец, мы должны установить еще одну последнюю аксиому относительно этих переносных движений, а именно такую: любые два сдвига T', T'' обладают переместительным свойством, т. е. получается одна и та же точка B как в том случае, если определенную точку A подвергнуть сперва сдвигу T', а затем сдвигу T'', так и в случае обратного порядка: подвергнуть сперва сдвигу T'', а затем сдвигу T' (рис. 106); символически это записывается так:

$$T' \cdot T'' = T'' \cdot T'.$$

Позже мне придется еще остановиться несколько подробнее на вопросе о том, как вообще приходят к подобным аксиомам; здесь же я хотел бы лишь подчеркнуть, что наши вышеприведенные аксиомы выражают как раз

[1] [Неубедительное доказательство: ведь точки A и B, описывающие две траектории, могли бы пройти в точку S их пересечения в разные моменты (или в разные этапы) непрерывного переносного движения, представляющего не одно, а бесконечно много взаимно однозначных сопряжений плоскости с самою собою.]

то, что представляется вполне привычным каждому человеку уже с первых уроков геометрического черчения. Ведь первое, что там делают, состоит в передвигании твердого тела — линейки или циркуля или чего-нибудь подобного — с одного места на другое, для того чтобы переносить величины, и в частности, невероятно часто применяют операцию сдвига, заставляя, например, треугольник скользить вдоль линейки (рис. 107). При этом опыт показывает каждый раз, что все точки треугольника описывают параллельные прямые. Таким образом наши допущения, которых мы не будем далее логически расчленять, не содержат в себе совершенно ничего искусственного.

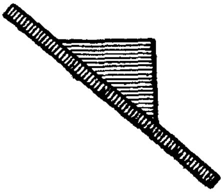

Рис. 107.

Посмотрим теперь, как далеко можно проникнуть в аналитическую геометрию, исходя из этих первоначальных понятий, относящихся к сдвигам. О прямоугольных координатах, конечно, не может быть и речи, так как мы до сих пор еще не имеем никакого опорного пункта для определения прямого угла, но зато можно ввести в общем виде параллельные координаты. Через некоторую точку O проводим две произвольные прямые, называя их x-осью и y-осью (рис. 108). Рассмотрим сдвиг T, переводящий точку O в произвольно выбранную точку 1 на x-оси. Тогда, повторяя несколько раз этот сдвиг T, получим из этой точки точки 2, 3, 4 на x-оси.

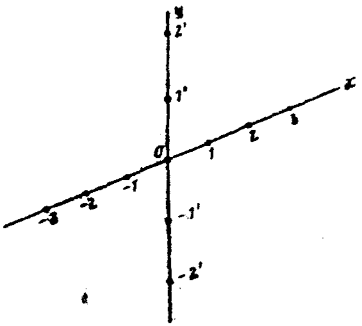

Рис. 108.

При повторении таким же образом обратной операции T^{-1}, определяемой тем, что она переводит 1 в O, точка O переходит поочередно в точки $-1, -2, -3, \ldots$ оси x. Получаемым таким образом точкам приписываем положительные и отрицательные целые числа $0, 1, 2, \ldots, -1-$

$-2, \ldots,$ как их „абсциссы“ x. Конечно, они не исчерпывают всех точек x-оси, но согласно одному из наших постулатов расположены таким образом, что всякая иная точка (той же оси) заключается между двумя точками из их числа.

Аналогичным образом, исходя из произвольного сдвига T' вдоль y-оси и выполняя его произвольно часто как в том, так и в другом направлении (вперед и назад), получаем во всех точках $1', 2', 3', \ldots, -1', -2', -3', \ldots,$ в которые попадают O, точки y-оси с положительными и отрицательными целочисленными координатами. При этом надо, разумеется, иметь в виду, что определяя таким образом отрезки x и y на обеих осях, мы еще не можем сопоставлять их между собою, так как мы не вправе пока применять наряду со сдвигами также движение (вращение), переводящее x-ось в y-ось.

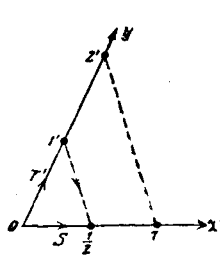

Рис. 109.

Теперь мы можем перейти также к точкам x-оси с нецелочисленными абсциссами, сохраняя ранее выбранную произвольно единицу. Что касается прежде всего рациональных точек, то мы будем искать для того, чтобы выяснить вопрос на конкретном примере, в первую очередь такой сдвиг S вдоль x-оси, который, будучи повторен один раз, дает как раз вышерассмотренный единичный сдвиг T. Тогда ту точку, в которую сдвиг S переводит точку O, мы отметим как точку $^1/_2$, а повторное применение S даст нам точки с абциссами $^3/_2, {}^5/_2, \ldots$ Для доказательства существования подобного сдвига S и вместе с тем этих точек покажем прежде всего, что прямая от точки $^1/_2$ к точке 1 y-оси должна быть параллельна прямой $12'$ (что соответствует известному построению, дающему деление отрезка на равные части). Действительно, рассматривая сдвиг S (рис. 109), переводящий O в точку $^1/_2$, как последователь ность сдвигов T' из O в $1'$ и S из $1'$ в точку $^1/_2$, можно однократное повторение сдвига S, что согласно определению тождественно со сдвигом T, заменить ввиду коммутативности любых двух сдвигов последовательностью однократно повторенного сдвига T' и однократно повторенного S'. А так как первый переводит O в $2'$, то этим сказано, что 1 получается из $2'$ путем двукратного применения сдвига S'. Итак, прямая $2'\ 1$ является одной из траекторий сдвига S' и, как таковая, действительно параллельна другой траектории того же сдвига, идущей от к $1'\ 1/2$.

Но ведь точки $2'$ и 1 нами уже были получены, так что сдвиг S' находится в нашем распоряжении. Поэтому было бы обеспечено однозначное построение на основании уже имеющихся элементов точки $^1/_2$, как точки пересечения x-оси и траектории точки $1'$ при этом сдвиге S', если бы мы только знали, что эта траектория действительно пересекает x-ось. Конечно, это не вызывает с точки зрения наглядных представлений ни у кого никаких сомнений, однако в рамках нашей аксиоматики такой вывод нуждается еще в одной особой аксиоме, так называемой „аксиоме взаимного расположения" („Zwischenaxiom") на плоскости. Суть этой аксиомы состоит в том, что прямая, входящая внутрь треугольника через одну его сторону, должна снова выйти из него через другую сторону [1], — тривиальный факт нашей пространственной интуиции, который приходится особо отмечать только по причине ее логической независимости от других аксиом. Путем совершенно аналогичных рассуждений, очевидно, возможно получить точку вообще для каждого рационального значения абсциссы x; из наших постулатов нетрудно умозаключить, что подобные „рациональные точки" имеются внутри всякого (как угодно малого) отрезка.

Но для того чтобы действительно получить все точки, какие фактически рассматриваются в геометрии, мы должны принять в расчет также и иррациональные абсциссы. А для этого нам нужен еще один, тоже весьма наглядный постулат, представляющий лишь выше обещанное уточнение требований непрерывности: должно существовать еще бесчисленное множество

---

[1] [Обыкновенно эту аксиому называют аксиомой, или постулатом, Паша (Pasch), который ввел ее в своих „Лекциях по новой геометрии" 1882 г.]

других точек на x-оси или соответственно сдвигов этой оси вдоль себя самой, которые находятся в таких же точно отношениях последовательности и непрерывности к рациональным точкам, в каких иррациональные числа находятся к рациональным числам. Эта аксиома представляется тем более самоочевидной, что ведь, обратно, введение иррациональных чисел произошло исторически в результате кручения геометрической непрерывности [1])

В результате все точки x-оси оказываются взаимно однозначно сопряженными со всеми положительными и отрицательными вещественными числами x; совершенно аналогично обстоит дело и с точками y-оси.

Обращу ваше внимание на то, что описанный здесь прием построения масштаба на прямой представляется вполне естественным. Всякий, кому приходится построить для себя масштаб, поступает так: перемещает вдоль своей линейки какое-нибудь твердсе тело, имеющее согласно произвольному соглашению длину в одну единицу (например, расстояние между остриями ножек циркуля), и затем подразделяет на равные части получаемые таким образом отрезки.

Теперь мы в состоянии охарактеризовать каждый сдвиг плоскости вдоль x-оси одним простым уравнением, дающим для каждой точки x на x-оси абсциссу ее нового положения:

$$x' = x + a,$$

т. е. к x прибавляется рациональный или иррациональный, положительный или отрицательный отрезок a. Подобно этому, сдвиг вдоль y-оси может быть описан уравнением:

$$y' = y + b.$$

Если выполнить (рис. 110) оба эти сдвига один после другого безразлично, в каком именно порядке, то начало O перейдет, по причине переместительности сдвигов, в некоторую вполне определенную точку P; тогда гово-

---

[1]) Ср. т. I, стр. 51 и сл.

рят, что точка P имеет **абсциссу** a и **ординату** b. Но можно и, обратно, каждой точке P однозначным образом отнести два числа a и b; для этого достаточно произвести сдвиг, переводящий O в P, и затем определить абсциссу и ординату точек пересечения осей в их новых положениях, в какие они при этом переходят, с их первоначальными положениями. Этим устанавливается взаимно однозначное сопряжение (или отображение) между совокупностью всех точек плоскости и совокупностью всех числовых пар (a, b), так что мы действительно получаем полное определение координат на плоскости.

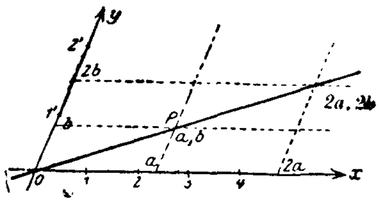

Рис. 110.

Остается только исследовать, как должно теперь выглядеть **уравнение прямой**. Рассмотрим сперва прямую, идущую от O к P (a, b); она должна, очевидно, содержать все те точки, какие получаются при повторении сдвига, перемещаемого O в P, т. е. точки:

$$x = \lambda a, \quad y = \lambda b$$

с целочисленным λ. Затем замечаем, что и все точки, определяемые этими уравнениями при рациональном и, наконец, при иррациональном λ, должны лежать на той же прямой, но что, с другой стороны, этим исчерпываются все ее точки. Таким образом исключение λ приводит ее уравнение к такому виду:

$$x : y = a : b$$

или

$$bx - ay = 0.$$

Поэтому всякое уравнение вида:

$$\alpha x + \beta y = 0$$

тоже изображает прямую, проходящую через O, если только α, β не обращаются одновременно в нуль. Но ведь любую прямую можно получить из подходящей выбранной прямой, проходящей через O, путем параллельного переноса, из чего окончательно заключаем, что совокупность всех прямых изображается совокупностью всех уравнений первого порядка:

$$\alpha x + \beta y + \gamma = 0,$$

которые носят название линейных уравнений.

Из того факта, что прямая изображается линейным уравнением, без труда получается методами аналитической геометрии значительная часть геометрических теорем. Не входя в детали, отмечу лишь, что таким образом можно вывести всю аффинную геометрию и вместе с тем также и всю проективную геометрию. Этих результатов мы достигаем, таким образом, на основе одних только специальных постулатов, относящихся к подгруппе ∞^2 сдвигов.

Остановлюсь еще только на одном факте, который понадобится нам в дальнейшем. Мы доказали раньше при помощи теорем проективной геометрии то предложение Мёбиуса, согласно которому всякая коллинеация является проективным преобразованием, т. е. преобразованием, которое изображается дробно-линейными или соответственно целыми линейными подстановками координат. Но ведь согласно нашему первому допущению движения представляют собой коллинеации, при которых каждой точке, находящейся на конечном расстоянии, соответствует также не бесконечно удаленная точка, а с другой стороны, мы теперь уже построили всю проективную геометрию, и поэтому с нашей теперешней точки зрения предложение Мёбиуса имеет также силу. В результате каждое движение необходимым образом изображается линейным целым преобразованием только-что введенных параллельных координат x, y.

Если мы теперь пожелаем проникнуть далее в область метрических понятий геометрии, в частности, установить понятия угла между двумя прямыми и расстояния между любыми двумя точками (до сих пор мы могли говорить только о расстоянии двух точек, лежащих на x-оси или на y-оси), то нам придется заняться полной группой движений.

В частности, фиксируем наше внимание на тех движениях, которые оставляют без изменения какую-нибудь точку, например начало O; это будут, так называемые, **вращения** около этой точки. Тогда, согласно общему постулату, регулирующему определение движения, должно существовать **в точности одно вращение, которое переводит полупрямую a, исходящую из точки O, в любую другую полупрямую a' тоже из O** (рис. 111). Эти вращения являются в некотором смысле **двойственными или взаимными** (*dual*) по отношению к сдвигам, так как они оставляют без изменения некоторую точку подобно тому, как сдвиги переводят в самое себя некоторую прямую. По аналогии со сдвигами мы будем представлять себе все вращения также совершающимися непрерывно, исходя из начального положения, и снова будем говорить о **траекториях**, которые при этом описывает каждая точка.

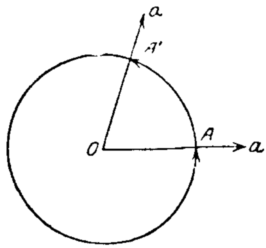

Рис. 111.

Однако между вращениями и сдвигами имеется существенное различие, которое мы должны тоже четко формулировать в виде особого постулата: **полупрямые a', a'',..., получаемые из полупрямой a при повторении одного и того же вращения около O, должны, в конце концов, либо достичь, либо перегнать всякую полупрямую**, выходящую из O (в то время как сдвиг давал только точки одной полупрямой). Поэтому, в частности, непрерывное вращение должно в конце концов вернуть полупрямую a в ее начальное положение, причем и каждая точка A должна вернуться в свое начальное положение: траектории представляют поэтому замкнутые линии, встречающие каждую полупрямую, исходящую из O, в одной и только одной точке A, так что все отрезки OA оказываются взаимно конгруэнтными (т. е. могут быть переведены один в другой путем изучаемого движения); таким образом эти траектории являются тем, что обычно называют **кругами с центром O**.

Теперь мы фиксируем в пучке лучей, исходящих из O, с помощью этих вращений некоторую *шкалу* совершенно подобно тому, как мы раньше строили шкалу на прямой с помощью сдвигов, причем тогда нам приходилось еще принять подходящее *допущение относительно непрерывности*. Я не стану входить здесь в детали всего этого и отмечу лишь как результат, что в конце концов с каждым вращением оказывается сопряженным некоторое вещественное число — *угол этого вращения*; причем и, обратно, каждое вещественное число оказывается углом некоторого вращения. Новым моментом является, конечно, здесь *периодичность* вращения, и поэтому представляется целесообразным избрать в качестве единицы как раз *полный оборот*, переводящий какой-нибудь (и вместе с тем и каждый!) луч [1]) снова в самого себя. Однако согласно традиции *за единицу* принимают вращение в одну *четверть полного оборота*, которое, будучи повторено четыре раза, дает полный оборот, и угол этого вращения называют *прямым углом* R. Тогда всякое вращение может быть измерено его углом $\omega \cdot R$, где ω может изображать любое вещественное число, которое можно ограничить благодаря периодичности интервалом значений от нуля до четырех (рис. 112).

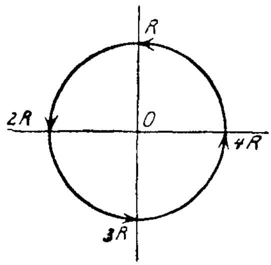

Рис. 112.

Подобным же образом можно определить шкалу углов в пучке лучей с любым другим центром O_1; но вместо этого можно *непосредственно перенести* при помощи соответственного сдвига *шкалу углов* из O в O_1. А именно, если даны полупрямые a_1 и a_1', исходящие из O_1 (рис. 113), и если T представляет сдвиг, переводящий O в O_1, то назовем буквами a, a' те лучи, исхо-

[1]) [В смысле „полупрямой", или „направленной прямой". Вообще Клейн пользуется в этом разделе терминами „луч", „полулуч", „полупрямая" (Strahl, Halbstrahl, Halbgerade) недостаточно четко. Мы употребляем „полупрямая" и „луч" как синонимы.]

дящие из O, в какие переходят лучи a_1, a_1' при выполнении обратного сдвига T^{-1}; если Ω представляет вращение около O, переводящее a в a', то вращение Ω_1 около O_1, переводящее a_1 в a_1', может быть получено путем последовательного выполнения операции T^{-1}, ΩT или, в непосредственно понятной символике:

$$\Omega_1 = T^{-1}\Omega T.$$

Действительно правая часть этого равенства тоже изображает движение O_1a_1 в O_1a_1', а такое движение представляется однозначно определенным. И вот мы приписываем вращению Ω_1 такой же самый угол $\omega \cdot R$, какой имеет вращение Ω согласно данному выше определению. Если дано какое-нибудь другое вращение Ω' в пучке O, то в пучке O_1 ему соответствует вращение $\Omega_1' = T^{-1}\Omega' T$, а сложение обоих вращений Ω_1 и Ω_1' равно

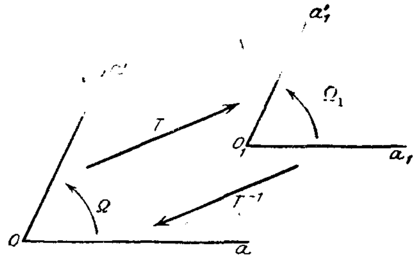

Рис. 113.

$$\Omega_1\Omega_1' = T^{-1}\Omega T T^{-1}\Omega' T = T^{-1}(\Omega\Omega')T;$$

таким образом оно соответствует сложению Ω и Ω'.

Из этого следует, что наш перенос действительно устанавливает при O_1 ту же самую шкалу, какую дало бы повторение прямого приема.

У Евклида имеется теорема, которая перешла в большинство наших элементарных учебников, а именно: в с е п р я м ы е у г л ы к о н г р у э н т ы м е ж д у с о б о ю; каждый учащийся, конечно, готов считать это положение самоочевидным, и я полагаю, что в школе действительно можно умолчать о нем, так как все равно школьник не в состоянии постичь заключенной в нем идеи. Но его действительный смысл в точности совпадает с содержанием наших последних рассуждений, а именно: равные углы, определенные помощью вращений около различных точек, можно привести ко взаимному наложению с помощью движений, другими словами, — они конгруэнтны между собой.

Установив таким образом общее определение угла, мы теперь дадим также определение расстояния между любыми двумя точками, тогда как до сих пор мы могли сравнивать только расстояния на одной и той же прямой при помощи сдвигов. Если расстояние r отложено, например, от O по x-оси, то мы можем (рис. 114) перенести его помощью вращения около O на всякую другую

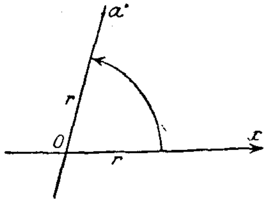

Рис. 114.

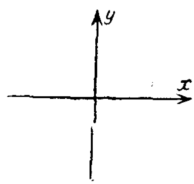

Рис. 115.

прямую a', проходящую через O; таким образом можно вообще всю шкалу длин на x-оси перенести на a', а затем помощью сдвига — на всякую другую прямую, параллельную a' и, следовательно, вообще на любую прямую. В результате мы действительно получаем возможность измерять расстояние между какими угодно двумя точками соединяя эти точки прямою и перенося на нее описанным способом масштаб с x-оси. В частности, таким приемом можно построить масштаб на y-оси (который мы вначале считали самостоятельно установленным), исходя из масштаба на x-оси.

Теперь мы пополним наш аппарат аналитической геометрии этим новым понятием вращения. При этом мы будем пользоваться, — на что мы теперь имеем право, — вместо общих параллельных координат специальными прямоугольными координатами x, y.

Мы уже знаем (стр. 275), что всякое движение изображается некоторой линейной подстановкой в x, y:

$$x' = (a_1 x + b_1 v + c_1) : N,$$
$$y' = (a_2 x + b_2 y + c_2) : N.$$

Так как эта подстановка переводит всякую конечную снова в конечную же точку, то знаменатель N должен быть постоянным, так что можно принять его равным единице. В частности, для вращения около O имеем: $c_1 = c_2 = 0$, так что подстановка принимает такой вид:

$$\left.\begin{aligned} x' &= a_1 x + b_1 y, \\ y' &= a_2 x + b_2 y. \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Для одного специального вращения, а именно для вращения на один прямой угол мы можем указать непосредственно точную форму этих уравнений. Дело в том, что для наших прямоугольных координат при таком вращении x-ось переходит в y-ось, а y-ось — в отрицательную x-ось, так что уравнения принимают такой простой вид:

$$\left.\begin{aligned} x' &= -y, \\ y' &= -x. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Теперь вопрос о нахождении формул вращения сводится к такой чисто аналитической задаче: требуется найти такую однократно-бесконечную группу подстановок вида (1), которая содержала бы в себе подстановку (2) и для которой всякая подстановка группы, вообще говоря, получается путем ω-кратной итерации (повторения) из (2), где ω обозначает некоторый вещественный параметр. В случае рационального дробного $\omega = \frac{p}{q}$ это выражение [т. е. ω-кратную итерацию (2)] надо, конечно, понимать в том смысле, что искомая подстановка, будучи повторена q раз, дает как раз разультат p-кратно итерированной подстановки (1), тогда как иррациональные значения ω следует аппроксимировать рациональными значениями согласно постулатам непрерывности.

Следует уяснить себе, что здесь не следует предполагать никаких геометрических значений, в частности, относительно формул вращения прямоугольной системы координат, но зато мы вправе и действительно хотим без стеснения пользоваться сведениями по анализу. И хотя получаемое построение не может найти в такой форме непосредственного применения в школьном преподавании; зато оно принимает очень изящный и простой вид.

Отмечу прежде всего, что вращение (2) может быть записано при помощи комплексных чисел также такой одной формулой:

$$x' + iy' = i(x + iy). \tag{2}$$

Отсюда сразу же заключаем, что итерированная подстановка выразится так:

$$x' + iy' = i^2 (x + iy),$$

т. е. посредством уравнения того же вида с той лишь разницей, что вместо i стоит i^2; точно так же при ω-кратной итерации в выше указанном смысле появляется множитель i^ω для каждого вещественного ω. В результате получаем такое аналитическое изображение вращений плоскости около O на угол $\omega \cdot R$:

$$x' + iy' = i^\omega (x + iy). \tag{3}$$

При точном проведении этого хода мыслей мы, конечно, должны воспользоваться из анализа полным знанием показательной функции e^z, а также тригонометрических функций, связанных с нею посредством формулы Эйлера:

$$e^{iz} = \cos z - i \sin z.$$

(не имея, однако, нужды, пока что, в каком-либо представлении об их геометрическом значении).

В таком случае мы знаем также число π из формулы

$$e^{i\pi} = -1$$

тогда:

$$i = e^{\frac{i\pi}{2}}.$$

А под i^ω всюду следует понимать значение, однозначно определенное такой формулой:

$$i^\omega = e^{\omega \frac{i\pi}{2}} = \cos \frac{\omega\pi}{2} + i \sin \frac{\omega\pi}{2}.$$

Вставляя это в (3) и отделяя вещественную и мнимую составные части, получаем:

$$\left.\begin{aligned} x' &= \cos\frac{\omega\pi}{2}\cdot x - \sin\frac{\omega\pi}{2}\cdot y, \\ y' &= \sin\frac{\omega\pi}{2}\cdot x + \cos\frac{\omega\pi}{2}\cdot y, \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

и это дает нам искомое изображение группы вращений с помощью более элементарных аналитических символов.

В связи с этим результатом представляется целесообразным принять прямой угол не за единицу, а за угол $\frac{\pi}{2}$. Мы будем это называть **натуральной шкалой углов** подобно тому, как мы говорим о натуральном логарифме, желая этим отметить, что эти понятия имеют свое основание в самой природе вещей, хотя обнаружение этого и требует более глубокого вникания. Пользуясь этой натуральной шкалой, будем вместо $\frac{\omega\pi}{2}$ писать просто ω [1]), и, таким образом, вместо (4) получаем в качестве формул вращения такие общеизвестные формулы:

$$\left.\begin{aligned} x' &= \cos\omega\cdot x - \sin\omega\cdot y, \\ y' &= \sin\omega\cdot x - \cos\omega\cdot y. \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

Теперь нам следует заняться исследованием того, какие геометрические истины содержатся в этих формулах. Это будут все те элементарные теоремы, какие обычно предпосылают, чтобы затем из них вывести формулы (5):

1. Рассмотрим сперва точку x-оси на расстоянии r от начала:

$$x = r,\ y = 0.$$

Если повернуть эту точку на угол ω, то формулы (5) дают такие координаты ее нового положения:

$$\left.\begin{aligned} x &= r\cos\omega, \\ y &= r\sin\omega; \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

---

[1]) Формулы (4) соответствуют вращению на $\omega\cdot R$, т. е. на $\frac{\omega\pi}{2}$ новых единиц; а при вращении (повороте) на угол ω (новых единиц надо в (4) вместо $\frac{\omega\pi}{2}$ написать всюду тоже ω.

при этом ради краткости мы опускаем акценты (штрихи) при координатах новой точки. Принимая для определенности $\omega < \frac{\pi}{2}$ и рассматривая прямоугольный треугольник (рис. 116), образуемый радиусом-вектором r точки x, y, ее абсциссой x и ординатой y, замечаем, что формулы (6) дают соотношения между его сторонами и углом ω Пользуясь соотношением $\cos^2\omega + \sin^2\omega = 1$, которое вытекает из тех аналитических определений этих функций, какие здесь положены в основу, получаем из (6) непосредственно:

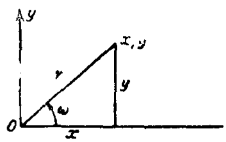

Рис. 116.

$$x^2 + y^2 = r^2, \tag{6a}$$

что представляет собой теорему Пифагора, которая получается, таким образом, как следствие наших допущений относительно движений плоскости. Но мы можем переписать (6) еще и в таком виде:

$$\cos\omega = \frac{x}{r}, \quad \sin\omega = \frac{y}{r}, \tag{6b}$$

и это дает то элементарно-тригонометрическое значение наших функций угла, какое обыкновенно берут в качестве их определения: косинус и синус представляют собой отношение прилежащего и противолежащего катета к гипотенузе.

2. Теперь нетрудно будет вывести общие аналитические выражения для основных понятий „расстояние“ и „угол“, переводя данные элементы (точки либо прямые) посредством сдвига и вращения в только что рассмотренное специальное положение. Таким образом для рассмотрения двух точек x_1, y_1 и x_2, y_2 находим:

$$r = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

Действительно, достаточно перевести помощью сдвига точку 2 в начало координат, чтобы согласно формулам сдвига получить разности $x_1 - x_2$, $y_1 - y_2$ в качестве новых координат точки 1, и тогда из формулы (6a) сразу получается наше выражение для r. Совершенно аналогично я, конечно, могу здесь не останавливаться на деталях, — из (6b) получаются следующие формулы для угла ω между любыми двумя прямыми, выражаемыми уравнениями:

$$\alpha_1 x + \beta_1 y + \delta_1 = 0,$$
$$\alpha_2 x + \beta_2 y + \delta_2 = 0,$$
$$\cos\omega = \frac{\alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2}{\sqrt{\alpha_1^2+\beta_1^2}\,\sqrt{\alpha_2^2+\beta_2^2}},$$
$$\sin\omega = \frac{\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1}{\sqrt{\alpha_1^2+\beta_1^2}\,\sqrt{\alpha_2^2+\beta_2^2}}.$$

3. Наконец, мы должны еще поговорить о понятии площади, которым нам до сих пор при нашем построении геометрии совершенно не приходилось еще пользоваться. Однако это понятие содержится, хотя в более или менее неточной форме, в наивном пространственном сознании каждого человека; всякий крестьянин знает, что означает фраза: участок земли имеет площадь в столько-то квадратных метров. Поэтому, если мы полностью обосновали геометрию — и это действительно сделано в предшествующем, — не пользуясь этим основным понятием, то мы должны его все же присоединить теперь задним числом к нашей системе, другими словами, выразить его в координатах.

Здесь нам приходится начать с одного небольшого геометрического соображения, которое приблизительно в том же виде постоянно встречается у Евклида и в элементарных изложениях геометрии. Имея прямоугольник с сторонами A, B, мы определяем в качестве его площади произведение $A \cdot B$. Соединяя, далее, в одно целое два прямоугольника или вообще две фигуры с известной площадью, получаем одну фигуру, площадь которой должна равняться сумме чисел, выражающих площади первых; если отнять от прямоугольника или вообще от какой-либо фигуры, меньшую фигуру целиком в ней заключающуюся, то площадь остатка должна выражаться разностью чисел, выражающих площади обеих фигур (рис. 117).

Установив это, мы сразу приходим к определению площади параллелограма. Параллелограм получается из прямоугольника с тем же основанием и высотой путем отнятия некоторого треугольника и присоединения

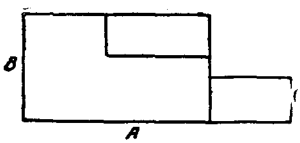

Рис. 117.

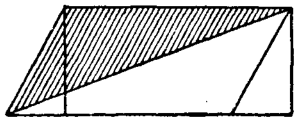

Рис. 118.

равного ему треугольника (рис. 118); поэтому его площадь равна площади названного прямоугольника и, следовательно, равна произведению основания на высоту. Диагональ делит параллелограм на два конгруэнтных треугольника, каждый из которых имеет поэтому площадью половину площади параллелограма: площадь треугольника равна половине произведения основания на высоту.

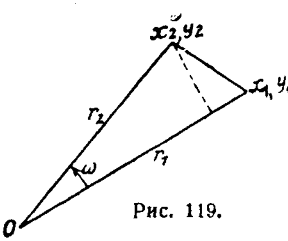

Рис. 119.

Применяя это к треугольнику со сторонами r_1, r_2 и с заключенным между ними углом ω, так что высота, опущенная на r_1, равна $r_2 \sin \omega$, находим для его площади выражение:

$$\Delta = \frac{r_1 r_2 \sin \omega}{2}.$$

Помещая одну вершину этого треугольника (рис. 119) в начале координат и обозначая координаты обеих других вершин через x_1, y_1 и x_2, y_2, мы легко можем перечислить эту формулу с помощью вышеуказанных выражений для расстояний и для угла в такую формулу:

$$\Delta = \frac{x_1 y_2 - x_2 y_1}{2}.$$

Легко убедиться в том, что вращения системы координат оставляют это выражение Δ без изменения, так что мы имеем в нем действительно некоторое „геометрическое понятие". Но, чтобы установить инвариантность также при сдвигах, а следовательно, и при всех вообще движениях, надо подвергнуть одновременному преобразованию третью вершину, т. е. установить формулу для площади треугольника, образованного любыми тремя точками $x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3$; тогда получаем:

$$\Delta = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix},$$

и это как раз та формула, с которой мы начали наш курс (стр. 17).

Легко проверить, что определенные таким образом площади треугольника при соединении треугольников в одно целое или при делении треугольников на части складываются или вычитаются; это сводится, как мы это уже видели ранее, к простым соотношениям между определителями.

Этим выполнено включение идеи площади в нашу систему аналитической геометрии, и в то же время мы приобрели нечто такое, чего сначала не было еще в наивном представлении: площадь становится величиной, снабженной знаком ($\pm$). Я уже изложил подробно в самом начале этого курса (стр. 17), какое преимущество достигается этим в отношении свободного оперирования с формулами и их недопускающей исключений приложимости по сравнению с наивным взглядом на площадь, как на абсолютную величину.

4. Дальнейшим примером понятия, содержащегося в более или менее точной форме в наивном представлении пространства, которое мы теперь только должны дополнительно включить в нашу систему геометрии, является понятие (произвольной) кривой. Каждый человек думает, что знает, что такое кривая, покуда он не изучит настолько математику, что его собьют с толку безчисленные возможные ненормальности; хорошую ориентировку дает соответствующий реферат в „Энциклопедии математических наук" (III, A. B. 2) составленный Мангольдтом (von Mangoldt), Понятия „линия" и „поверхность".

Но здесь мы не станем входить в подробности и скажем просто, что под кривой мы понимаем совокупность точек, координаты которых представляют непрерывные функции φ, χ параметра t, которые обладают столькими производными, сколько требуется в каждом отдельном случае:

$$x=\varphi(t),\ y=\chi(t).$$

Это дает возможность сразу развить в рамках нашей аналитической геометрии все те понятия и теоремы, какие обыкновенно объединяются названием инфинитезимальной (диференциальной) геометрии, в том числе понятие о длине дуги кривой, о площади изогнутой поверхности, о кривизне, об эволютах и т. д. Основная идея заключается постоянно в том, что кривую рассматривают как предел вписанного прямолинейного многоугольника (рис. 120). Если две соседние точки имеют координаты x, y и $x+dx$, $y+dx$, то из пифагоровой формулы тотчас же следует такое выражение для длины дуги:

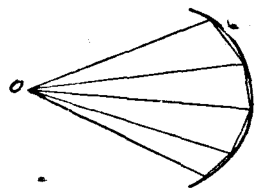

Рис. 120.

$$\int\sqrt{dx^2+dy^2},$$

и точно так же из формулы для площади треугольника с вершиной O сразу же получается уже ранее употреблявшаяся нами (стр. 28) формула:

$$\frac{1}{2}\int(x\,dy-y\,dx),$$

выражающая площадь сектора, заключенного между кривою и двумя радиусами-векторами, проведенными к O.

На этом я покидаю наше первое построение геометрии, которое характеризуется тем, что мы на первое место выдвинули существование и расчленение трехпараметровой группы движений и вслед затем сразу же ввели координаты с тем, чтобы иметь возможность в дальнейшем проводить наши выводы целиком в область арифметики. Этому построению в известной мере противостоит другой способ обоснования геометрии; он тоже приводит непосредственно к метрической геометрии и с давних пор играл большую роль; поэтому я хочу остановиться и на нем подробнее.

2. Другое обоснование метрической геометрии; роль аксиомы параллелей

Противоположность этого обоснования по сравнению с первым построением заключается в том, что здесь идея движения прямо-таки последовательно избегается либо вводится лишь в дальнейшем в качестве дополнительного звена. Если как в древности, так и теперь еще часто отдавали предпочтение такому именно распорядку, то это вызывалось, несомненно, хотя бы отчасти философскими соображениями, о которых я хочу сказать здесь хоть несколько слов. Опасались того, что вместе с движениями в геометрию войдет чуждый ей элемент — время; и если, с одной стороны, пытались помещение на первый план движений оправдать большой наглядностью идеи твердого тела, то, с другой стороны, на это возражали, что эта идея не только не имеет сама по себе точно уловимого смысла, но, как раз наоборот, — может быть обоснована лишь после того, как уже приобретено понятие о расстоянии. Конечно, на это эмпирист, со своей стороны всегда может ответить, что в действительности абстрактная идея расстояния извлекается из наличия „достаточно“ твердых тел.

А теперь разрешите мне указать вкратце основные мысли этого второго построения геометрии. Здесь начинают, как и раньше.

1) С введения точек и прямых и с предложений, (аксиом), касающихся их сочетания, расположения, непрерывности.

2) Но при этом вводят — и это здесь является новым — в качестве новых основных понятий, с одной стороны, расстояние между двумя точками (отрезок), а с другой — угол между двумя прямыми и устанавливают относительно них аксиомы, сущность которых заключается в утверждении того, что отрезки

и углы могут быть общеизвестным образом измерены посредством чисел.

3) В качестве характерной (для второго построения) аксиомы, которая замещает, собственно говоря, аксиомы группы движений, здесь выступает первое предложение о конгруэнтности: если две стороны и заключенный между ними угол одного треугольника равны соответственным элементам другого треугольника, то оба треугольника конгруэнтны, т. е. все их соответственные элементы равны друг другу[1]). В нашей прежней системе

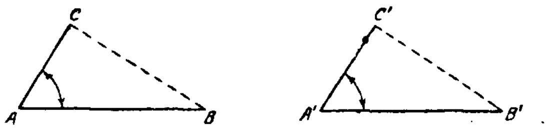

Рис. 121.

это является доказуемым предложением; можно указать движение, которое приводит (рис. 121) сторону $A'B'$ к наложению на AB; тогда в силу сделанного предположения сторона $A'C'$ тоже непременно совпадает с AC и вообще треугольники окажутся совмещенными. Если же мы не включаем движений в число основных понятий и, следовательно, не можем их применять, то нет никакой возможности доказать эту теорему, и мы вынуждены постулировать ее в качестве новой аксиомы.

4) При дальнейшем развитии идей поступают как раз обратно тому, что имело место при нашем первом построении, как это вам, конечно, известно. Элементарное преподавание геометрии следует, примыкая по существу к Евклиду, о котором позже мне придется еще подробно говорить, в точности этому (второму) пути. Сперва доказывают теорему Пифагора и затем вводят тригонометрические функции косинус и синус в связи с их ролью в учении о треугольниках; а отсюда уже приходят, наконец, к такому же аналитическому аппарату, как и раньше.

---

[1]) [Здесь Клейн не делает различия между равными, конгруэнтными и симметричными фигурами.]

5) При этом оказывается необходимым установить еще одну особенно важную аксиому, относящуюся к теории параллелей. При нашем первом обосновании параллельность была одним из первых основных понятий, которое сразу же возникло при рассмотрении сдвигов: мы называли прямые линии параллельными, если они являлись траекториями (различных точек) при одном и том же сдвиге. Совершенно иначе обстоит дело здесь; среди до сих пор введенных основных понятий параллельность не встречалась, поэтому нам приходится теперь поговорить еще в отдельности о ней. А именно, имея прямую g (рис. 122) и точку O вне g, соединяем O с точкой P, лежащей на g, и отодвигаем P в положения P', P'', ... и все дальше и дальше на g (иными словами, мы представляем себе последовательность точек $P, P', P'', \ldots$ или соответственно последовательность прямых OP, OP', OP'', ... о движении же в прежнем смысле слова здесь не говорится). Луч OP, при этом вращении вокруг O, достигнет некоторого предельного положения, когда P удалится в бесконечность, и эту *предельную прямую* мы и *называем параллельной к* g, *проходящей через* O. При этом нет никакой априорной (vonvornherein) необходимости в том, чтобы луч OP приближался *к одному и тому же* предельному положению при удалении P в бесконечность как в одну, так и в другую сторону, что дает *абстрактную возможность существования двух различных прямых, проходящих через* O *параллельно прямой* g.

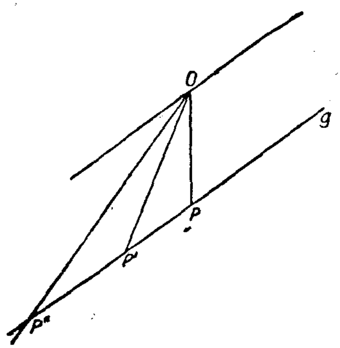

Рис. 122.

Поэтому для нашего теперешнего построения является *новой аксиомой*, если мы постулируем в согласии с нашей привычной интуицией, что эти два предельных положения всегда должны совпадать, иначе говоря, что через точку O должна проходить только одна прямая, параллельная к прямой g. Это и есть та знаменитая аксиома параллелей, которая в течение ряда столетий вызывала столько споров; ее же называют еще евклидовой аксиомой, так как у Евклида она четко сформулирована в виде постулата.

Прежде всего я должен сообщить вам кое-что касающееся истории этой аксиомы. В течение долгого времени делались величайшие усилия, направленные к нахождению доказательства этой аксиомы, т. е. к сведению ее на предшествующие ей геометрические аксиомы, и, конечно, всегда безуспешные. Эти усилия не прекратились и по сей день, и это вполне естественно: наука может прогрессировать как угодно далеко и все же всегда найдутся люди, которые полагают, что лучше понимают дело, и игнорируют результаты надежного точного исследования.

В действительности математика давно уже перешла от тех тщетных попыток к плодотворным новым исследованиям и положительным результатам. Уже в 18-м столетии возникает характерная новая, более широкая постановка вопроса: не является ли возможным построить логически последовательную, свободную от внутренних противоречий, систему геометрии, которая воздерживалась бы от этой аксиомы параллелей и допускала бы существование двух различных предельных прямых в вышеуказанном смысле, т. е. двух различных параллелей к g, проходящих через O?

В начале XIX столетия математика оказалась в состоянии дать утвердительный ответ на этот вопрос; Гаусс (Gauss) первый открыл существование неевклидовой геометрии, так мы называем вместе с ним геометрическую систему указанного рода; из литературного наследия Гаусса явствует, что он, несомненно, уже в 1816 г. имел вполне точное представление о ней; но относящиеся сюда заметки были найдены лишь много позже и в 1900 г. напечатаны в т. VIII „Собрания произведений Гаусса“ [1]).

[1]) Gesammelte Werke, Bd. VIII, Leipzig 1900. Относящаяся сюда часть издана Штеккелем (P. Stäckel).

Сам Гаусс ничего не опубликовал, кроме немногих случайных высказываний, об этом своем великом открытии. Независимо от него неевклидову геометрию построил около 1818 г. юрист Швейкарт (Schweikart), назвавший ее **астральной** (т. е. **звездной**) **геометрией**. Он тоже не опубликовал своих исследований. Впервые узнали кое-что о них из одного письма, написанного Гауссу и найденного среди бумаг последнего. Первые опубликованные работы по неевклидовой геометрии написали русский геометр Н. И. Лобачевский (1829) и венгерец Больяи младший (J. Bolyai de Bolya) (1832)[1]), которые оба нашли эти результаты независимо один от другого и обладали ими, насколько можно судить по имеющимся материалам, уже в 1826 г. и соответственно в 1823 г. В течение протекшего столетия эти вещи благодаря многим работам стали общим достоянием математиков, и в наши дни всякому образованному вообще человеку приходилось слышать что-нибудь о существовании неевклидовой геометрии, хотя только специалист может достичь ясного ее понимания.

Существенно новое направление дал этим вопросам Риман (Riemann) в начале второй половины XIX столетия; оно изложено в лекции „О гипотезах, лежащих в основании геометрии", прочитанной Риманом в 1854 г. для получения права преподавания в университете (так называемый Habilitationsvortrag [2])). Риман замечает, что в основе всех предшествовавших исследований лежит **допущение того, что прямые имеют бесконечную длину**, которое является, конечно, крайне естест-

---

[1]) Эти работы переведены на немецкий язык Энгелем и Штекелем в издании „Urkunden zur Geschichte der nichteuklidischen Geometrie" (Документы по истории неевклидовой геометрии"), Teil 1. (Lobatschewsky) von Engel (Leipzig 1913); Teil 2. (W. u. J. Bolyai) von Stäckel (Leipzig 1913). Ср. также „Urkundensammlung zur Vorgeschichte der nichteuklidischen Geometrie" (Собрание документов по ранней истории неевклидовой геометрии") von Stäckel und Engel, 1895.

[2]) Напечатано в 13-м томе Abhandlungen der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen; Gesammelte mathem. Werke (Римана) 2. Aufl. (Leipzig 1892). стр 272 и сл. Вновь издано отдельной брошюрой Вейлем (H. Weyl) Berlin. 3. Aufl., 1923. [Существует русский перевод проф. Д. М. Синцова в сборнике „Об основаниях геометрии", изд. физ. мат. фак. (Казанского университета), 2-е изд., Казань 1895. Готовится к печати новое издание ГТТИ.]

венным. Но что получится, если отбросить это допущение, если, например, вместо него предположить, что прямые суть линии замкнутые, вроде больших кругов на сфере? Здесь речь идет о различии между бесконечностью и безграничностью (Unendlichkeit und Unbegrenztheit) пространства; это различие лучше всего можно понять, рассматривая аналогичное соотношение в двумерной области: безграничными являются как обыкновенная плоскость, так и поверхность сферы, но только первая бесконечна, тогда как другая имеет конечное протяжение.

Риман действительно считает пространство лишь неограниченным, но не бесконечным; тогда прямая становится замкнутой кривой, на которой точки расположены, как на окружности. Если заставить теперь снова, как и прежде, точку P перемещаться по прямой g все время в одном направлении, то она в конце концов снова вернется к исходному месту, а луч OP вообще не будет иметь никакого предельного положения: не существует вовсе прямой, проходящей через O параллельно прямой g. Таким образом у Римана мы встречаемся со вторым видом неевклидовой геометрии („Н. Г. II") в противоположность неевклидовой геометрии Гаусса, Больяи и Лобачевского („Н. Г. I").

На первый взгляд это кажется парадоксальным, но математик сразу подмечает здесь аналогию с обыкновенной теорией квадратных уравнений, что указывает на путь к пониманию этих вещей. А именно, квадратное уравнение имеет либо два различных вещественных корня, либо не имеет ни одного такого корня (но имеет зато два мнимых корня), либо, наконец, в качестве переходного случая имеет один двойной вещественный корень. Это вполне аналогично с двумя различными вещественными параллелями Н. Г. I, с отсутствием действительных параллелей в Н. Г. II и, наконец, с переходным (или промежуточным) случаем одной параллели, определяемой двояким образом, как некое предельное положение в евклидовой геометрии.

Прежде чем приступить к более точному математическому рассмотрению неевклидовой геометрии, я хочу хотя бы вкратце коснуться ее большого философского значения, благодаря которому она всегда встречала со стороны философов живой интерес, часто сопровождаемый резко отрицательным отношением.

Прежде всего эта дисциплина дает ответ на вопрос о том, какой характер имеют геометрические аксиомы, рассматриваемые с точки зрения чистой логики. А именно, из самого факта существования неевклидовой геометрии можно непосредственно заключить, что евклидова аксиома отнюдь не является следствием предпосланных ей основных понятий и аксиом и что и в других отношениях не имеется ничего такого, что логически понуждало бы нас к ее принятию. Ибо, заменяя ее противоречащим ей допущением и сохраняя неизменными все прочие аксиомы, мы не только не приходим ни к какому противоречию, но получаем неевклидову геометрию в качестве дисциплины, столь же безупречной логически, как и евклидова геометрия. Таким образом те особенности нашего представления о пространстве, описание которых дает аксиома параллельных, во всяком случае, не является чисто логическою необходимостью.

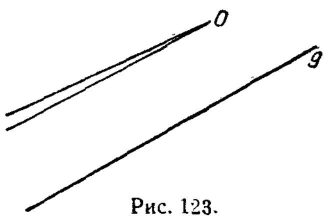

Рис. 123.

Но в таком случае спрашивается: нельзя ли разрешить вопрос об истинности аксиомы параллелей с помощью чувственной интуиции (Sinnesanschanung)? И по этому вопросу неевклидова геометрия тоже дает важные указания, а именно: является безусловно неверным мнение, будто непосредственное чувственное восприятие учит нас существованию в точности одной параллели. Дело в том, что наше восприятие пространства (Raumwahrnehmung) отнюдь не обладает абсолютной точностью и что и здесь, как и во всякой другой области чувственного восприятия, мы не в состоянии воспринимать как различные те величины (отрезки, углы и т. д.), разность между которыми лежит ниже известного предела, так называемого порога.

В частности, если через точку O провести две прямые, чрезвычайно близко одну от другой (рис. 123), то мы наверное не будем в состоянии различить их между собою, если только угол между ними будет достаточно мал, например, равен $1''$ или, если угодно, $\frac{1}{1000}''$ или еще меньше. Поэтому представляется затруднительным вывести из непосредственного созерцания заключение о том, проходит ли через O действительно одна и только одна параллель к g или же две, но отстоящие одна от другой всего лишь на такой незначительный угол. Мы почувствуем это еще яснее, если представим себе, что O лежит невероятно далеко от g, скажем, на расстоянии Сириуса от Земли или даже в миллионы раз еще дальше. При таких расстояниях чувственное созерцание теряет совершенно ту остроту, которую вообще считают свойственной ему, и наши глаза абсолютно неспособны больше различить, имеется ли одна или две параллели к данной прямой g, соответственно определению параллели как предельного положения вращающегося луча.

С этим положением вещей неевклидова геометрия первого рода мирится фактически так же хорошо, как и евклидова. Как вы увидите еще яснее из тех математических формул, которые я сейчас сообщу, неевклидова геометрия первого рода содержит еще одну произвольную постоянную; оперируя ею надлежащим образом, можно сделать угол между обеими параллелями к g, проходящими через умеренно удаленную от g точку O, как угодно малым, и только по мере удаления O от g этот угол будет приобретать все более заметную величину.

Таким образом, поскольку верно то, что наше восприятие пространства охватывает только ограниченную его часть и притом с ограниченною точностью, поскольку его можно учесть сколько угодно точно посредством некоторой Н. Г. I.

Но совершенно аналогично обстоит и с Н. Г. II. Необходимо только отдать себе отчет в том, что бесконечная длина прямых тоже не является обязательным выводом из непосредственного чувственного созерцания.

Мы можем проследить всякую прямую только в пределах некоторой конечной части пространства, поэтому мы не впадем в противоречие с нашими восприятиями, если скажем, что прямая имеет, хотя и невероятно большую, но все же конечную длину, быть может, равную нескольким миллионам, или даже еще большему числу, расстояний до Сириуса; фантазия может, конечно, придумывать здесь сколь угодно большие числа, выходящие за пределы всякой возможности непосредственного созерцания. *В виду этих соображений, можно, как угодно точно, представить отношение во всякой ограниченной части пространства также и посредством Н. Г. II, тоже содержащей произвольный параметр.*

Затронутые здесь логические и интуитивные факты, изложенные так, как они представляются с точки зрения математики, идут, конечно, в высокой степени в разрез с тем ортодоксальным пониманием пространства, какое многие философы связывают с именем Канта и согласно которому все теоремы геометрии должны иметь абсолютную силу. Этим объясняется, почему неевклидова геометрия вызвала столько раздражения и сопротивления в философских кругах с самого начала их знакомства с нею.

Обращаясь, наконец, к *собственно математической трактовке неевклидовых геометрий*, сделаем лучше всего, если выберем *путь, ведущий через проективную геометрию;* это тот самый прием, какой я указал в 1871 г. в четвертом томе журнала „Mathematische Annalen“ [1]).

Представляем себе проективную геометрию, построенную независимо от всякой метрики, исходя из основных понятий „точка, прямая, плоскость“ и из относящихся к ним аксиом сочетания, расположения и непрерывности таким именно образом, кяк я вкратце наметил в начале этих рассуждений об основаниях геометрии (стр. 262 и сл.). В частности, пусть введены также точечные координаты x, y, z или, в однородном виде $\xi:\eta:\zeta:\tau$ и таким же

---

[1]) „Über die sogenannte nichteuklidische Geometrie“ („О так называемой неевклидовой геометрии“) стр. 573; F. Klein, Gesammelte mathematische Abhandlungen, Bd. I, стр. 254 и сл.

образом плоскостные координаты $\alpha:\beta:\gamma:\delta$, так что взаимная принадлежность (инцидентность) точки и плоскости записывается билинейным уравнением

$$\alpha\xi+\beta\eta+\gamma\zeta+\delta\tau=0.$$

На этой основе мы получили раньше обычную евклидову геометрию при помощи теории инвариантов и принципа Кэли, присоединяя специальную квадратичную форму, записанную в плоскостных координатах так:

$$\Phi_0=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2,$$

которая, будучи приравнена нулю, изображает круг сфер. При этом угол между плоскостями:

$$\omega=\arccos\frac{\alpha_1\alpha_2+\beta_1\beta_2+\gamma_1\gamma_2}{\sqrt{\alpha_1^2+\beta_1^2+\gamma_1^2}\sqrt{\alpha_2^2+\beta_2^2+\gamma_2^2}}$$

и расстояние между двумя точками:

$$r=\frac{\sqrt{(\xi_1\tau_2-\xi_2\tau_1)^2+(\eta_1\tau_2-\eta_2\tau_1)^2+(\zeta_1\tau_2-\zeta_2\tau_1)^2}}{\tau_1\tau_2}$$

являлись тогда, как мы показали (стр. 258 и сл.), простыми совокупными инвариантами данной фигуры (двух плоскостей или двух точек) и формы Φ_0.

Совершенно таким же образом мы хотим теперь притти к неевклидовой геометрии; но только вместо мнимого круга $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=0$, мы возьмем другую квадратичную форму, „соседнюю“ с первой, именно:

$$\Phi=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\varepsilon\cdot\delta^2.$$

Здесь ε есть параметр, который можно выбрать сколь угодно малым, и при $\varepsilon=0$ получается $\Phi=\Phi_0$. Наш выбор формы Φ сделан таким образом, что при положительном ε получается Н. Г. I, при отрицательном ε — Н. Г. II, а при $\varepsilon=0$ — вышенаписанные формулы обычной евклидовой геометрии.

Существенным при установлении этой формы Ф является то, что ее **определитель**:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\varepsilon \end{vmatrix} = -\varepsilon,$$

вообще говоря, отличен от нуля и исчезает только в специальном случае $\varepsilon = 0$, т. е. тогда, когда уравнение $\Phi = 0$ изображает круг сфер. Таким образом наш прием сводится к тому, что мы заменяем квадратичную форму с равным нулю определителем такою же формою с необращающимся в нуль положительным либо отрицательным (но по абсолютной величине как угодно малым) определителем.

Метрические величины наших неевклидовых геометрий мы получим путем образования из общей формы Ф и из фигуры, состоящей из двух плоскостей либо из двух точек, инвариантов совершенно подобных тем, какими являются вышеуказанные евклидовы величины для специальной формы $\Phi_0 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$. Это есть не что иное, как принадлежащая в 1859 г. Кэли [1]) мысль о том, что по отношению к любой поверхности II порядка (например, поверхности $\Phi = 0$) можно установить мероопределение с таким же успехом, как и по отношению к кругу сфер. При том скромном размере, каким естественно должен быть ограничен здесь этот экскурс, представляется наиболее целесообразным предпослать в виде определений аналитические формулы. Это даст возможность быстрее всего точно сформулировать положение вещей, и при этом будет избегнута всякая тень чего-то таинственного. Конечно, такой способ изложения только в том случае может привести к полному пониманию предмета, если вслед за этим проработать его еще точным образом с геометрической стороны, что вы как раз найдете в моей уже упомянутой работе в IV томе „Математических анналов“.

Начиная с рассмотрения двух плоскостей, нетрудно сообразить, как следует обобщить предыдущее выражение для угла между этими двумя плоскостями, **изме-**

---

[1]) В цитированном уже раньше „Шестом мемуаре“.

ренного по отношению к поверхности $\Phi = 0$; составляем точно таким же образом, как и раньше, из значений формы Φ и ее полярной формы выражение:

$$\omega = \arccos \frac{\alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2 + \gamma_1\gamma_2 - \varepsilon\delta_1\delta_2}{\sqrt{\alpha_1^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2 - \varepsilon\delta_1^2}\ \sqrt{\alpha_2^2 + \beta_2^2 + \gamma_2^2 - \varepsilon\delta_2^2}};$$

это, очевидно, инвариантное выражение действительно переходит при $\varepsilon = 0$ в выражение для угла евклидовой геометрии.

Представляется не столь непосредственно ясным, какой именно вид должно иметь **выражение для расстояния двух точек** в нашем мероопределении; трудность этого перенесения заключается в том, что теперь мы применяем форму с неисчезающим определителем вместо лежащей в основе евклидова мероопределения формы Φ_0 с исчезающим определителем. Но мы можем найти путь к установлению выражения для расстояний, если будем поступать в точности взаимным образом по сравнению с только что данным определением угла; тогда мы наверное снова получим некоторый инвариант. Итак, запишем сперва уравнение поверхности $\Phi = 0$ в точечных координатах; как известно, левая часть $f(\xi, \eta, \zeta, \tau)$ этого уравнения получается путем окаймления определителя Δ формы Φ точечными координатами:

$$f = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \xi \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \eta \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \zeta \\ 0 & 0 & 0 & -\varepsilon & \tau \\ \xi & \eta & \zeta & \tau & 0 \end{vmatrix} = \varepsilon(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2) - \tau^2;$$

чтобы перенести теперь в точности выражения для ω, составим частное из полярной формы по отношению к f и из произведения квадратных корней из значений f для точек *1* и *2* и возьмем арккосинус этого выражения:

$$r = K \cdot \arccos \frac{\varepsilon(\xi_1\xi_2 + \eta_1\eta_2 + \zeta_1\zeta_2) - \tau_1\tau_2}{\sqrt{\varepsilon(\xi_1^2 + \eta_1^2 + \zeta_1^2) - \tau_1^2}\ \sqrt{\varepsilon(\xi_2^2 + \eta_2^2 + \zeta_2^2) - \tau_2^2}}.$$

Присоединенный здесь множитель K позволяет нам принять за единицу любой отрезок, что соответствует нашему обыкновению, и, кроме того, окажется необходимым при предстоящем нам переходе к евклидовой геометрии. При этом следует давать K при отрицательном ε вещественные, а при положительном ε чисто мнимые значения для того, чтобы r оказывалось вещественным для всей или же (при $\varepsilon > 0$) по крайней мере для известной части всей области вещественных точек, которая в таком случае образует вещественный субстрат неевклидовой геометрии.

Это дало бы нам общее определение расстояния. Оставалось бы только показать, что при $\varepsilon = 0$ оно приводило бы обратно к вышеуказанному выражению евклидовой геометрии. Здесь это обстоит не так просто, как выше для угла ω. Действительно, если положить без дальнейшего $\varepsilon = 0$, то получается для частного единица, так что $\frac{r}{K}$ оказывается равным нулю, с точностью до остающегося по необходимости неопределенным аддитивного (слагаемого) кратного 2π.

И все же, несмотря на этот, на первый взгляд несколько парадоксальный результат, можно с помощью некоторого искусственного приема притти в конце концов к евклидову выражению. Для этого будет удобным сперва несколько преобразовать уравнение, определяющее r, при помощи известного тождества:

$$\arccos\alpha + \arcsin\sqrt{1-\alpha^2}.$$

Приводя сразу же к общему знаменателю, находим:

$$r = K\cdot\arcsin\sqrt{\frac{\left\{\varepsilon\left(\xi_1^2+\eta_1^2+\zeta_1^2\right)-\tau_1^2\right\}\left\{\varepsilon\left(\xi_2^2+\eta_2^2+\zeta_2^2\right)-\tau_2^2\right\}-\left\{\varepsilon\left(\xi_1\xi_2+\eta_1\eta_2+\zeta_1+\zeta_2\right)-\tau_1\tau_2\right\}^2}{\left\{\varepsilon\left(\xi_1^2+\eta_1^2+\zeta_1^2\right)-\tau_1^2\right\}\left\{\varepsilon\left(\xi_2^2+\eta_2^2+\zeta_2^2\right)-\tau_2^2\right\}}}.$$

Числитель в этом выражении легко можно преобразовать. А именно согласно известному соотношению из теории определителей значение определителя f (т. е. однажды окаймленного определителя Δ формы Φ) для точки 1, умноженное на его же значение для точки 2 минус квадрат его полярной формы, составленной для точек 1 и 2, равно произведению самого определителя Δ

на этот же определитель Δ, но дважды окаймленный координатами точек *1* и *2*, т. е. равно

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\varepsilon \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \xi_1 & \xi_2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \eta_1 & \eta_2 \\ 0 & 4 & 1 & 0 & \zeta_1 & \zeta_2 \\ 0 & 0 & 0 & -\varepsilon & \tau_1 & \tau_2 \\ \xi_1 & \eta_1 & \zeta_1 & \tau_1 & 0 & 0 \\ \xi_2 & \eta_2 & \zeta_2 & \tau_2 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Вычислив это, находим:

$$-\varepsilon\cdot\{(\xi_1\tau_2-\xi_2\tau_1)^2+(\eta_1\tau_2-\eta_2\tau_1)^2+(\zeta_1\tau_2-\zeta_2\tau_1)^2-$$
$$-\varepsilon(\eta_1\zeta_2-\eta_2\zeta_1)^2-\varepsilon(\zeta_1\xi_2-\zeta_2\xi_1)^2-\varepsilon(\xi_1\eta_2-\xi_2\eta_1)^2\}.$$

Тот, кого стесняют вычисления такого рода с определителями, может убедиться путем прямого преобразования в тождественности этого выражения с вышенаписанной формой числителя.

Если это выражение ввести в формулу для r и положить $\varepsilon=0$, то получится, конечно, так же, как и из первой формы, $\frac{r}{K}=\arcsin 0=0$, по причине множителя $\sqrt{-\varepsilon}$. Но если, прежде чем давать ε обратиться в нуль, сообщить ему лишь очень малое значение, то арксинус будет в первом приближении равен синусу; при этом в числителе можно пренебречь тремя квадратами, умноженными на ε, и точно так же в знаменателе отпадает в каждом сомножителе член, умноженный на ε, так что в первом приближении остается:

$$r=K\cdot\sqrt{-\varepsilon}\,\frac{\sqrt{(\xi_1\tau_2-\xi_2\tau_1)^2+(\eta_1\tau_2-\eta_2\tau_1)^2+(\zeta_1\tau_2-\zeta_2\tau_1)^2}}{\tau_1\tau_2}.$$

А теперь применим упомянутый кунштюк. **Вместо того чтобы приписывать коэфициенту K во время предельного перехода $\lim\varepsilon=0$ постоянное значение, заставим K одновременно бесконечно возрастать, притом таким образом, чтобы было**

$$\lim(K\sqrt{-\varepsilon})=1.$$

Для этого придется, конечно, заставить K пробегать по чисто мнимым либо по вещественным значениям, смотря по тому, будет ли ε приближаться к нулю с положительной или отрицательной стороны. Но вместе с этим становится вполне очевидным, что путем такого предельного перехода действительно получается выражение для расстояния из обыкновенной евклидовой геометрии.

Если же вдуматься в геометрическое значение формы f, а также тех выражений, которые установлены здесь только аналитическим путем, то действительно окажется, что в случае $\varepsilon > 0$ имеем дело как раз с неевклидовой геометрией первого рода, при $\varepsilon < 0$ — неевклидовой геометрией второго вида и при $\varepsilon = 0$, конечно, с евклидовой геометрией. Разумеется, я не могу дать здесь точного обоснования всего этого; интересующихся отсылаю хотя бы к несколько раз уже упомянутой моей работе в 4-м томе „Математических Анналов“ [1]). Я тогда предложил для этих трех геометрий названия: гиперболическая, эллиптическая и параболическая геометрия, так как существование двух действительных, двух мнимых либо одной двойной параллели в точности соответствует числу и природе асимптот трех родов конических сечений. Эти названия вы можете часто встретить в литературе.

Но я хотел бы на одном примере показать несколько подробнее, какой именно вид принимает теория параллелей на основании нашего выражения для расстояния; я выбираю для этой цели гиперболическую геометрию на плоскости. Тогда третью координату следует все время считать равною нулю, и наша квадратичная форма принимает вид: $\Phi = \alpha^2 + \beta^2 - \varepsilon\delta^2$; будучи приравнена нулю, она изображает в силу того, что $\varepsilon > 0$, некоторое действительное коническое сечение, которое мы можем представить себе и начертить в виде эллипса. Формула расстояния обращается в

$$r = K \cdot \arccos \frac{\varepsilon(\xi_1\xi_2 + \eta_1\eta_2) - \tau_1\tau_2}{\sqrt{\varepsilon(\xi_1^2 + \eta_1^2) - \tau_1^2}\sqrt{\varepsilon(\xi_2^2 + \eta_2^2) - \tau_2^2}}$$

с чисто мнимым K. Она дает, как нетрудно убедиться,

[1]) Следует указать еще раз на выходящее вскоре в свет „Введение в неевклидову геометрию“ Ф. Клейна (в обработке В. Роземана); эта книга является переработкой ранее изданных в литографированном виде лекций Клейна по неевклидовой геометрии.

вещественные значения для таких точек, которые лежат внутри действительного конического сечения; при этом под внутреннею областью понимаем совокупность всех тех точек плоскости, через какие не проходит ни одна действительная касательная к коническому сечению. Поэтому вся область операций вещественной гиперболической геометрии состоит исключительно из точек этой внутренней области и из прямых, поскольку они проходят по ней. А сами точки конического сечения (рис. 124) изображают бесконечно удаленные элементы. Действительно, вышеуказанная формула дает для расстояния любой точки *1* от какой-либо точки конического сечения *2* (для которой $\varepsilon(\xi_2^2 + \eta_2^2) - \tau_2^2 = 0$) значение ∞. Таким образом на всякой прямой вещественной гиперболической геометрии имеется в этом смысле две бесконечно удаленные точки — обе ее точки пересечения с коническим сечением $\Phi = 0$, а на каждой полупрямой O только одна. Если имеем прямую g и не лежащую на ней точку O, то параллелями через O в смысле нашего прежнего определения (стр. 290), т. е. предельными положениями прямой, соединяющей O с точкой P, уходящей по g в бесконечность, являются прямые, соединяющие O с точками пересечения g с коническим сечением. Имеется, следовательно, действительно две существенно между собой различных параллели, каждая из которых принадлежит одному из двух направлений на g.

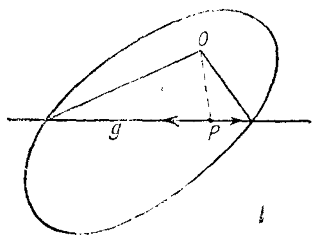

Рис. 124.

Разрешите сделать еще одно небольшое замечание, относящееся к сравнению с нашим первым построением евклидовой геометрии. Там исходным пунктом служила группа движений; это была совокупность всех коллинеаций, оставляющих неизменными метрические соотношения. Но и в случае (любой) неевклидовой геометрии тоже имеются подобные коллинеации. Общее однородное уравнение второго порядка имеет 10 членов, следовательно, 9 существенных констант; в случае самой общей пространственной коллинеации имеется 15 произвольных параметров, так что существуют еще шестикратно-бесконечные $[\infty^6]$ коллинеации, переводящие (преобразующие) заданную квадратичную форму, например, наше Φ, в саму себя, а это ведь и является условием того, что введенные нами метрические соотношения не испытывают изменений. Поэтому в каждой неевклидовой геометрии тоже имеется шестикратно-бесконечная группа „движений", оставляющих без изменений величины ω и r; в случае геометрии на плоскости число параметров, как и раньше, свелось бы к трем.

Поэтому мы можем построить также любую неевклидову геометрию, исходя из существования некоторой группы движений; остается еще только уточнить, чем именно объясняется то, что при нашем прежнем построении мы приходили исключительно и именно к евклидовой геометрии. Причина этого, конечно, лежала в том, что мы из всех движений выхватывали специально некоторую двухпараметровую (в пространстве это была бы трехпараметровая) подгруппу так называемых параллельных смещений и сдвигов, для которых траекториями являются исключительно прямые линии.

Между тем, ни в одной неевклидовой геометрии не существует подобных подгрупп; поэтому постулируя их существование с самого начала, мы тем самым заранее исключили все неевклидовы геометрии и удержали одну только евклидову геометрию.

А теперь разрешите мне закончить эти специальные разъяснения о неевклидовой геометрии несколькими, я бы сказал, руководящими положениями общего характера:

1. Если я выше сообщил о том, что со стороны философов неевклидова геометрия все еще часто не встречает полного понимания, то теперь я должен подчеркнуть, что в математической науке она в настоящее время пользуется всеобщим и полным признанием. Мало того, ею даже пользуются для многих целей, как, например, в современной теории функций и теории групп как чрезвычайно удобным вспомогательным средством для

того, чтобы представить в наглядной форме арифметически запутанные соотношения.

2. Каждый преподаватель обязательно должен быть хоть немного знаком с неевклидовой геометрией; ведь она принадлежит в настоящее время к тем немногим частям математики, которые стали известны в широких кругах, по крайней мере, в форме отдельных характерных словечек; поэтому каждого учителя могут в любую минуту спросить о ней. В физике имеется несравнимо больше подобных вещей, к ним принадлежит почти каждое новое крупное открытие, о которых всюду говорят и с которыми поэтому должен быть знаком, разумеется, каждый преподаватель. Представьте себе только учителя физики, который не в состоянии ничего сказать о рентгеновых лучах или о радии; не произвел бы значительно лучшего впечатления и тот математик, который не мог бы ничего ответить на вопросы о неевклидовой геометрии.

3. В противовес этому я хотел бы настойчиво отсоветовать введение неевклидовой геометрии в регулярное школьное преподавание (т. е. помимо случайных намеков, вызываемых интересующимися учениками), что постоянно рекомендуют энтузиасты. Мы будем довольны, если только всегда будет выполнено предыдущее требование и если, с другой стороны, учащиеся действительно научатся понимать евклидову геометрию. В конце концов, если учитель знает чуточку больше, чем средний ученик, то это ведь вполне в порядке вещей.

Теперь я сообщу еще вкратце о дальнейшем развитии современной науки, вызванном неевклидовой геометрией.

Исходным пунктом служил здесь преимущественно тот ее результат, согласно которому евклидова аксиома параллелей логически независима от предшествующих ей аксиом геометрии (стр. 294); это побудило предпринять исследование также и других геометрических аксиом в смысле их взаимной логической зависимости или независимости. Так возникла современная геометрическая аксиоматика, следующая в своих изысканиях в точности тем путям, какие были намечены прежними исследованиями: стараются установить, какие части геометрии можно построить без применения известных аксиом, а также можно ли, заменяя одну какую-нибудь определенную аксиому ей противоположною, притти к логически непротиворечивой системе — к одной из так называемых „псевдогеометрий“.

В качестве самого важного из относящихся сюда исследований я должен назвать вам книгу „Основы геометрии“ Гильберта (Hilbert)[1], главная цель которой в отличие от прежних исследований заключается в том, чтобы установить указанным только что образом значение для геометрии аксиом непрерывности. Чтобы достигнуть этой цели, необходимо, конечно, прежде всего так упорядочить систему аксиом геометрии, чтобы теоремы о непрерывности приходились на самый конец, тогда как до сих пор мы всегда помещали их вначале. Подобно этому при выводе неевклидовой геометрии мы не могли воспользоваться, например, первым построением аксиом, выдвигающим понятие о параллелях на первое место, но должны были прежде всего создать такую систему аксиом, в большей части которой ничего не говорится о параллельных прямых и в которой аксиома параллелей появляется лишь после этого. Если не считать указанного этим существенного отклонения, то система аксиом Гильберта примыкает по существу к тому же ходу построения элементарной геометрии, какому мы тоже следовали при нашем втором построении геометрии.

На этой основе Гильберт исследует, как далеко может быть продвинуто построение геометрии, если не пользоваться аксиомами непрерывности; этим самым он охватывает одновременно те „псевдогеометрии“, в которых имеют силу все прочие геометрические аксиомы, кроме аксиом непрерывности; последние по существу соответствуют тем фактам, которые относятся ко взаимно однозначному сопряжению точек прямой с обыкновенными

[1]) „Grundlagen der Geometrie“ знаменитого геттингенского профессора Давида Гильберта впервые напечатано в 1899 г. и с тех пор много раз переиздавалось все с новыми и новыми дополнениями [имеется также и русский перевод этой книги. В настоящее время ГТТИ готовит издание нового перевода].

вещественными числами (их абсциссами). Я не могу, конечно, входить здесь в рассмотрение ни хода мыслей в исследованиях Гильберта ни полученных им при этом интересных результатов относительно логической связи определенных геометрических теорем и аксиом. Желательно, чтобы вы сами прочитали обо всем этом у Гильберта, руководясь этими немногими ориентирующими замечаниями. Напомню еще только, что упомянутая уже при случае в I томе этих лекций [1]) гильбертова неархимедова геометрия принадлежит сюда же; это как раз такая псевдогеометрия, в которой не выполняется именно аксиома непрерывности, носившая раньше имя Архимеда, а теперь чаще имя Евдокса, т. е. геометрия, в которой абсциссы двух различных точек могут в известных случаях различаться только на „актуально бесконечно малую величину", никакое конечное кратное которой не равно обыкновенному конечному вещественному числу.

Мне не хотелось бы обрывать этих кратких замечаний о современной аксиоматике, не сказав еще несколько слов об истинной природе геометрических аксиом и принципов (Sätze), переходя, конечно, при этом от строго математической постановки вопроса к философско-теоретико-познавательной.

Одно я уже подчеркивал, и относительно этого теперь все согласны, а именно то, что здесь речь идет о главенствующих понятиях и предложениях, которые должно непременно предпослать геометрии, чтобы вообще иметь возможность проводить на их основе чисто логическим путем математические доказательства. Но такая установка не дает еще ответа на вопрос о том, откуда же собственно происходят эти главнейшие понятия и предложения. Старая точка зрения заключалась в том, что они непосредственно даны в интуиции (Anschauung) каждого человека, что они обладают столь очевидною простотою, что никто не может в них сомневаться. Однако такой взгляд был в сильной степени поколеблен открытием неевклидовой геометрии; ибо этим было как раз показано, что пространственная интуиция и логика

---

[1]) См. т. I, стр. 327 [356].

никоим образом не приводят, как к чему-то обязательному, к евклидовой аксиоме параллельных, но что, принимая противоречащее ей допущение, приходим тоже к геометрической системе логически замкнутой в себе и достаточно точно изображающей действительные (фактические) отношения. Но, несомненно, все же остается возможность рассматривать эту аксиому параллельных как такое допущение, которое позволяет самым простым способом изображать пространственные отношения. Это приводит к такому общему положению: основные понятия и аксиомы являются не просто фактами интуиции, но целесообразно подобранными идеализациями этих фактов. Уже резко очерченное понятие точки не существует в непосредственном чувственном созерцании (интуиции), но является лишь воображаемым пределом, к которому мы можем приближаться с нашими представлениями о маленькой части пространства, никогда, однако, его не достигая.

В противоположность этому среди людей, интересующихся только логической стороной вопроса, а не интуитивной или общегносеологической, в последнее время часто встречается то мнение, что аксиомы являются лишь произвольными предложениями, которые мы устанавливаем, руководясь исключительно своими желаниями, а основные понятия тоже в конечном счете являются лишь произвольными знаками (символами) для обозначения вещей, с какими мы желаем оперировать. В таком взгляде заключается, конечно, та доля истины, что в пределах чистой логики не находится никакого основания для этих предложений и понятий и что поэтому они должны быть доставлены либо получить побуждение к созданию со стороны, как раз именно благодаря воздействию интуиции. Но авторы часто выражаются гораздо более односторонне, и, таким образом, в последние годы в связи с современной аксиоматикой мы не раз снова наталкивались как раз на то направление в философии, которое с давних пор получило название номинализма. Здесь интерес к самим вещам и к их свойствам совершенно утрачивается; говорят только о том, как их называют и по каким логическим схемам оперируют с этими именами (названиями). Например, говорят так: „точкой называем совокупность трех координат, ничего себе при этом не представляя“, и условливаемся „произвольно“ относительно известных предложений, которые должны иметь силу по отношению к этим точкам; при этом мы можем совершенно неограниченно устанавливать любые аксиомы, если только удовлетворяем законам логики и прежде всего если следим за тем, чтобы в возводимом здании из теорем не оказывалось никаких противоречий. Я лично никоим образом не разделяю этой точки зрения, и считаю ее смертью для всей науки: **аксиомы геометрии представляют собою** по моему мнению **непроизвольные, но разумные суждения, вызванные в общем пространственным созерцанием и регулируемые в деталях соображениями целесообразности.**

Этим философским экскурсам, повод к которым несколько раз представлялся нам в последнем разделе, я хотел бы противопоставить теперь **разъяснения, относящиеся к истории геометрии**, в частности, к развитию взглядов на основания. В этом отношении с самого начала приходится отметить большое различие по сравнению с подобными соображениями, которые мы часто излагали в последнюю зиму для областей алгебры, арифметики и анализа. История этих дисциплин в их современном виде насчитывает, собственно говоря, лишь несколько столетий; они начинаются вместе с действиями над десятичными дробями и с буквенным исчислением, т. е. в круглых числах около 1500 г.

В противоположность этому **история геометрии как самостоятельной дисциплины восходит далеко в глубь греческой древности**, а именно геометрия уже в то время достигла столь высокого уровняя развития, что долгое время, вплоть до наших дней, в греческой геометрии видели образец совершенной науки.

При этом в качестве суммарного изложения греческой геометрии всегда рассматривался самый значительный дошедший до нас систематический курс — знаменитые „Начала“, или „Элементы“ (στοιχεῖα), Евклида; вряд ли существует другая книга, которая так долго удерживала бы подобное положение в своей науке. И теперь еще всякий математик должен считаться с Евклидом, и мы посвятим поэтому ему последний раздел этой главы.

3. Начала Евклида

Разрешите мне прежде всего предложить вашему вниманию лучшее в филологическом отношении издание этого творения, обработанное Гейбергом (J. L. Heiberg) в Копенгагене [1]). В этом издании наряду с греческим оригиналом помещен его латинский перевод, что весьма полезно также и для тех, кто изучал греческий язык в школе. Дело в том, что греческий язык Евклида существенно отличается, особенно своими техническими оборотами, от того греческого языка, какому учат в школе. В качестве литературы для введения в изучение Евклида я особенно рекомендую вам „Историю математики в древности и в средние века“ Цейтена (Zeuthen) [2]) и „Евклиди 6 планиметрических книг“ Макса Симона [3]). Вы легче всего овладеете предметом, если сперва прочтете Симона, затем общие комментарии Цейтена, а после того непременно возьметесь за особенно точное изучение текста по Гейбергу, относясь с критическим недоверием ко всякому переводу.

О самом Евклиде мы знаем очень мало, известно только, что он жил в Александрии около 300 г. до н. э. Но зато мы имеем достоверное представление об общем характере процветавшей тогда в Александрии научной деятельности. После основания мировой империи Александра постепенно возникла потребность собрать и привести в цельную научную сис-

---

[1]) Euclidis opera omnia, Bd. I—V. Elementa (Leipzig 1883–1888). [На русский язык „Начала“ переводили несколько раз. Наиболее поздний (и чаще других встречаемый в библиотеках) перевод был издан проф. Ващенко-Захарченко (Киев 1880). ГТТИ предполагает издать новый перевод.]

[2]) [Русский перевод этой книги, первоначально изданной по-датски (1893), а затем переведенной на немецкий и французский, издан ГТТИ в 1932 г.]

[3]) Leipzig 1901 „Abhandlungen zur Geschichte der mathematischen Wissenchaften“, XI.

Укажем еще на комментарии Гиса (T. L. Heath) в его английском переводе текста Гейберга „The thirteen Books of Euclid's Elements“, 3 тома, Cambridge 1908.

тему все то, что было создано в предшествовавшие столетия. Так получило в Александрии свое развитие преподавание, которое вполне соответствовало известным сторонам нашего теперешего университетского преподавания. Но только при этом на первый план выдвигалось собирание и приведение в порядок наличного материала, оставляя позади свободно развивающееся научное исследование, так что во всей работе оказывалась известная склонность к схоластическому педантизму.

Прежде чем приступить к более детальному разбору „Начал", позвольте сделать несколько замечаний общего характера об историческом положении и научном значении Евклида или, вернее, евклидовых „Начал". Если для полной характеристики личности Евклида надо, несомненно, учесть также и его многочисленные более мелкие произведения, то не будет неправильным, если здесь я буду говорить лишь об одном этом великом творении; ибо только оно завоевало для себя то удивительное господствующее положение, которое с нашей точки зрения настоятельно требует критики.

Основанием для этой критики пусть послужит то замечание, что причина ложной оценки „Начал" Евклида коренится в превратном представлении о характере греческого ума вообще, которое было распространено в течение долгого времени и, пожалуй, еще и теперь пользуется большой популярностью: думали, что греческая культура ограничивалась сравнительно немногими областями, но зато уже эти области она переработала с таким совершенством в один цельный образ, что достигнутый ею уровень должен для всех времен служить высочайшим, недосягаемым идеалом. Но в действительности современная филологическая наука давно уже обнаружила несостоятельность такой точки зрения. Она показала, что, наоборот, именно греки, как никакой другой народ, творчески проявили себя во всех областях человеческой культуры с самой большой, какую только можно представить себе, разносторонностью. И как верно то, что они всюду достигли поразительных для того времени результатов, так же верно и то, что во многих вещах с нашей теперешней точки зрения они не пошли дальше первых начатков, и ни об одной области нельзя сказать, что они для всех времен добились вершины человеческих достижений.

Что касается специально математики, то эта переоценка — или быть может следует сказать: недооценка? — греческой культуры нашла свое выражение в догме, согласно которой греки занимались почти исключительно геометрией и создали здесь непревзойденную систему; это мнение, в частности, сконцентрировалось прямо-таки в своего рода культ евклидовых „Начал“, в которых усматривали совершеннейшее выражение этой системы. Этому старому и устарелому взгляду я должен противопоставить здесь такое утверждение: наряду с геометрией греки плодотворно разрабатывали также и различнейшие другие области математики, но мы в настоящее время всюду, включая и геометрию, существенно перегнали их.

Позвольте мне теперь подробнее изложить и обосновать это утверждение. Составляя свои „Начала“, Евклид отнюдь не имел в виду написать энциклопедию всех геометрических знаний своего времени, иначе он не оставил бы в них без всякого даже упоминания целые отделы геометрии, тогда уже, несомненно, известные; для примера я назову только теорию конических сечений и высших кривых, которую греки уже в раннюю эпоху начали подробно разрабатывать[1]), хотя своего полного расцвета она достигла лишь у Аполлония (около 200 г. до нашей эры). Напротив, „Начала“ должны были дать лишь введение в изучение геометрии — и вместе с тем и математики вообще — и при этом они были, повидимому, приноровлены еще к одной совершенно особой цели: они должны были дать изложение математики в том виде, в каком она считалась необходимой с точки зрения платоновой школы, как подготовка к общим занятиям философиею. Такое назначение „Начал“ делает понятным, почему главное значение придавалось выработке логических связей и установлению замкнутой

[1]) Между прочим сам Евклид написал недошедшее до нас сочинение о конических сечениях.

самой в себе системы геометрии, тогда как все практические применения целиком отодвигались в сторону. В угоду этой же системе Евклид, несомненно, оставил без внимания целую область теоретического знания своего времени, которая тогда еще не настолько развилась, чтобы могла уложиться в нее.

Мы скорее всего получим правильное представление об ограниченности материала евклидовых „Начал“ по сравнению с объемом греческой математики вообще, если для сравнения дадим общую характеристику личности и всех достижений величайшего греческого математика Архимеда, который жил вскоре после Евклида, около 250 г. до нашей эры, в городе Сиракузах; я выделю только несколько особенно интересных пунктов различия:

1. В полную противоположность духу, господствующему в „Началах“ Евклида, Архимед обладает сильно развитою склонностью к числовым операциям. Ведь одним из его величайших достижений является, (чтобы привести определенный пример) вычисление числа π посредством аппроксимирования окружности правильными многоугольниками; между прочим, уже Архимед находит известное приближенное значение $\frac{22}{7}$ для π. У Евклида же нет и тени интереса к таким числовым значениям; вместо этого у него мы встречаем лишь указание на то, что площади двух кругов относятся как квадраты их радиусов или что длины двух окружностей относятся, как сами радиусы, но не делается даже попытки вычисления множителя пропорциональности, т. е. числа π.

2. Вообще для Архимеда является характерным большой интерес ко всякого рода приложениям; он занимается самыми различными проблемами физики и техники. Всем известно, как он нашел основной принцип гидростатики или как он принимал деятельное участие в защите Сиракуз конструированием весьма эффективных вспомогательных машин. А до чего мало Евклид в своих „Началах“ принимает во внимание применения, видно особенно ясно из того небольшого факта, что он не называет даже простейших чертежных инструментов —

линейки и циркуля; он просто постулирует in abstracto, что можно начертить прямую, проходящую через две точки, или описать круг около точки, не упоминая ни единым словом о том, как это делают. Здесь Евклид находится, несомненно, во власти того взгляда, господствовавшего вообще в известных античных философских школах, по которому практические применения науки являются чем-то низкопробным, ремесленническим. К сожалению, этот взгляд до сих пор сохранился во многих местах, и все еще встречаются университетские преподаватели, которые не находят достаточно презрительных слов по адресу всякого занятия приложениями. С высокомерием, которое сказывается в таких взглядах, должно бороться самым решительным образом. Всякое дельное достижение, относится ли оно к теоретической или к прикладной области, следовало бы ценить одинаково высоко, предоставляя каждому возможность заниматься теми вешами, к которым он чувствует наибольшую склонность. Тогда каждый проявит себя тем более разносторонним образом, чем большим числом талантов он обладает: величайшие гении, каковы Архимед, Ньютон, Гаусс, всегда охватывали равномерно и теорию и практику.

3. Наконец, еще одно отличие особенно бросается в глаза: Архимед был великим исследователем и пионером, в каждой своей работе он продвигал область нашего знания на шаг вперед, а в „Началах" Евклида речь идет только о собирании и систематизации уже имеющегося материала. С этим связана разная форма изложения, на что я при случае указывал также и в прошлом семестре в моих общих выводах [1]). В этом отношении особенно характерна для Архимеда уже упомянутая в томе I рукопись [2]), найденная в 1906 г., в которой он сообщает одному своему другу ученому свои новейшие исследования по кубатуре пространственных образов. Здесь изложение в точности соответствует тому способу, какого мы придер-

[1]) См. т. I, стр. 126.

[2]) Heiberg und Zeuthen, Eine neue Schrift des Archimedes (Leipzig 1907), Bibliotheca mathematika (журнал), 3, Folge, Bd. 7, стр. 321 и сл. Имеется в русском переводе: Гейберг, Новое сочинение Архимеда, с предисловием И. О. Тимченко (Одесса, Матезис 1909)].

живаемся в нашем теперешнем преподавании; материал дается в *генетической* форме, сперва намечается ход мыслей, и никоим образом не применяется то окостенелое расчленение на предположения, утверждение, доказательство, ограничение, какое господствует в „Началах“ Евклида. Впрочем еще до этого нового открытия было уже известно, что греки знали наряду с выкристаллизированным „евклидовым“ изложением какой-нибудь систематизированной дисциплины также и более свободную генетическую форму, которой пользовался как исследователь в своей работе, так и учитель в преподавании, и которую, возможно, и сам Евклид применял в других сочинениях либо в своем собственном преподавании. Действительно, тогда в Александрии существовало даже точное подобие наших литографированных лекционных записок, их называли hypomnemata, это было более или менее вольно составленное воспроизведение устного преподавания.

Сказанного достаточно для сравнения „Начал“ со всей областью греческой математики. Теперь, чтобы закончить наш ход мыслей, я хочу еще показать на двух-трех примерах, как далеко шагнула современная математика по сравнению с древнегреческою. Одно из важнейших отличий заключается в том, что греки не имели еще *самостоятельных арифметики и анализа*, не знали ни десятичных дробей, облегчающих сложные числовые выкладки, ни общего буквенного исчисления; и то, и другое является, как я показал более подробно в минувшем зимнем семестре, изобретением наступающего нового времени, эпохи Возрождения. Заменой (суррогатом) этого для греков могло служить только *исчисление в геометрической форме*, в котором вместо чисел оперируют построениями с отрезками или с другими геометрическими величинами, что оказывается, конечно, несравненно более громоздким, чем наши арифметические действия. В связи с этим находится и то, что греки не владели также и тем, чем, собственно, впервые обусловливается практичность нашей арифметики и анализа — *отрицательными и мнимыми числами*. Вследствие этого грекам недоставало той общности метода, которая позволяет охватить одной формулой все, какие только возможны, случаи, и крайне длительные различения отдельных случаев у них играли огромную роль. В геометрии этот недостаток часто дает себя сильно чувствовать именно там, где мы в настоящее время — в этих лекциях мы всегда так и поступали — легко можем, применяя аналитические средства, достичь полной общности, минуя всякие различения отдельных случаев. Ограничимся этими немногими указаниями. Вы сами можете легко на основе ваших личных знаний дать себе дальнейший отчет в успехах современной математики по сравнению с античною.

После этой общей критики евклидовых „Начал" мы можем перейти к их детальному рассмотрению. Позвольте начать с краткого обзора содержания тех „13 книг", т. е. глав, из которых состоят „Начала" [1]:

В книгах, с 1-й по 6-ю, излагается планиметрия. Первые 4 книги содержат общие рассуждения об основных геометрических образах (отрезках, углах, площадках и т. д.) и учение о простых геометрических фигурах (треугольниках, параллелограмах, окружностях, правильных многоугольниках и т. д.) в том виде, в каком их излагают и теперь еще по большей части. Здесь же (в книге 2-й) дается также элементарная арифметика и алгебра геометрических величин такого рода, что, — привожу только один пример, — произведение $a \cdot b$ двух отрезков a, b изображается в форме прямоугольника; для сложения двух таких произведений $a \cdot b$, $c \cdot d$, что арифметически можно выполнить непосредственно, приходится, для того чтобы получить сумму снова в виде прямоугольника, превратить оба прямоугольника $a \cdot b$, $c \cdot d$ в прямоугольники с одинаковым основанием.

Содержание 5-й книги гораздо глубже; в ней вводится геометрический эквивалент всякого вообще положительного вещественного числа. Им является отношение $\frac{a}{b}$ любых двух отрезков a, b, которые Евклид называет Logos (λόγος).

---

[1] Говорят также о 14-й и 15-й книгах „Начал" (V том в издании Гейберга). Но эти две книги написаны не Евклидом. Первую из них написал, повидимому, Гипсикл, а вторую приписывают некоему Дамаскию.

Когда в прошлом семестре мы говорили вообще об иррациональных числах, то я уже указывал на это[1]). Существенным моментом в этой теории является **определение равенства двух отношений** $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$; это определение должно иметь совершенно общий характер, в частности, оно должно быть приложимо и в том случае, когда $\frac{a}{b}$ представляет в нашем понимании иррациональное число, т. е. когда, как говорит Евклид, отрезки a, b суть „asymmetroi", т. е. не имеют общей меры, или, как это перевели позже, суть „incommensurabiles" (несоизмеримы). Евклид поступает таким образом: он берет любые два целые числа m, n и сравнивает, с одной стороны, отрезки $m \cdot a$ и $n \cdot b$, а с другой — отрезки $m \cdot c$ и $n \cdot d$; во всяком случае, будет иметь место одно какое-нибудь из трех соотношений: $m \cdot a \gtreqless n \cdot b$ соответственно $m \cdot c \gtreqless n \cdot d$.

Если при всяком выборе чисел m **и** n **в обоих случаях** (т. е. слева и справа) **всегда получается один и тот же знак** $\left(\gtreqless\right)$, **то говорим, что** $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

Это фактически вполне соответствует элементарному **методу сечений**, с помощью которого Дедекинд вводит иррациональные числа.

Вслед за этим Евклид исследует, как надо производить вычисления с такими равенствами отношений и развивает свое много раз уже упомянутое **учение о пропорциях**, т. е. геометрическую теорию всевозможных алгебраических преобразований равенств типа $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. Заметим, что у Евклида пропорция называется „Analogia"; это слово должно означать: Logos двух пар величин один и тот же. Вы видите, как поразительно сильно изменилось с тех пор значение этого слова. Впрочем, в математике имеются места, в которых оно сохранило до сегод-

---

[1]) См. т. I, стр. 45 и сл.

няшнего дня свое первоначальное значение; так, в тригонометрии говорят об *аналогиях Непера* именно потому, что они представляют собою известные пропорции. Но несомненно, что теперь лишь очень немногим известно собственное значение этого названия.

Учение о пропорциях представляет характерный пример того, с каким упорством держится в преподавании геометрии евклидова традиция. Еще до сего времени во многих, да, пожалуй, даже в большинстве школ, это учение трактуется как *особая глава геометрии*, хотя по своему содержанию оно полностью содержится в нашей современной арифметике и соответственно этому уже до того прорабатывается в школьном курсе математики даже дважды: первый раз в курсе арифметики при решении задач посредством тройного правила, а во второй раз — в начальном курсе буквенного исчисления. Зачем в таком случае те же самые вещи должны появляться еще в третий раз и притом в форме особенно таинственного геометрического откровения, этого поистине невозможно понять, и оно должно, конечно, и для ученика оставаться совершенно непонятным.

Единственное основание этого заключается в том, что все еще придерживаются старого евклидова построения курса, хотя та разумная цель, которую Евклид преследовал своим учением о пропорциях — заменить им отсутствовавшую у него арифметику — для нас стала совершенно бессодержательной.

Эта критика современной постановки учения о пропорциях не относится, конечно, к *научному значению 5-й книги Евклида*, напротив того, последнее тем более велико, что здесь впервые, выражаясь в современных терминах, совершенно безупречно изложено *оправдание производства действий с иррациональными числами* на основании четких определений. Здесь особенно ясно видно, что „Начала" ни в коем случае никогда не были и теперь не являются школьным учебником, как это по недоразумению часто принималось; напротив, они, несомненно, предполагают более зрелого читателя, могущего следить за чисто научными рассуждениями.

Я должен упомянуть еще здесь о том традиционном мнении, что пятая книга написана не самим Евклидом, а принадлежит Евдоксу из Книды (около 350 г. до начала нашей эры).

Вообще „Начала“ не считают цельным, написанным зараз сочинением, а полагают, что они составились из различных, более ранних составных частей.

Как бы там ни было, но во всяком случае все определенные указания относительно действительных авторов и т. д. сопряжены с полной неуверенностью, так как не сохранилось никаких исторических заметок, которые принадлежали бы Евклиду или кому-либо из его современников. В данном случае традиция восходит к комментатору Евклида Проклу Диадоху, который жил около 450 г. после начала нашей эры, т. е. более чем через 700 лет после Евклида. Хотя по некоторым причинам утверждение Прокла и обладает известной долей внутренней вероятности, но признать его за абсолютно верное свидетельство можно не в большей мере, чем теорию какого-нибудь нашего современника об авторстве сочинения, написанного около 1200 г.

Продолжая обзор содержания „Начал“, отметим, что книга 6-я содержит учение о подобных фигурах, причем главным орудием в ней является как раз упомянутая теория пропорций.

В книгах 7, 8, 9-й, заключается учение о целых числах частью в геометрической форме. При этом для пропорций с целыми числами, т. е. для вычислений с рациональными дробями, дана теория, совершенно независимая от построений 5-й книги. Хотя рациональные дроби являются только частным случаем действительных чисел, однако более общая теория, развитая раньше, совершенно не принимается во внимание. Трудно себе представить, что оба изложения принадлежат одному автору.

Из содержания этих книг я хотел бы упомянуть здесь только о двух вещах, которые еще и теперь постоянно применяются в теории чисел. Это, во-первых, алгорифм Евклида для нахождения общего наибольшего делителя двух целых чисел a и b, которые у Евклида изображаются в виде отрезков. В современных терминах этот алгорифм состоит в том, что a делят на b, b на остаток от этого деления и так продолжают поступать по схеме:

$$a = m \cdot b + r_1,$$
$$b = m_1 \cdot r_1 + r_2,$$
$$r_1 = m_2 \cdot r_2 + r_3,$$

пока не получится деления без остатка, что необходимо должно случиться после конечного числа шагов; последний остаток и будет искомым делителем. Во-вторых, уже у Евклида имеется известное простое доказательство существования бесконечно многих простых чисел, которое я изложил уже в предыдущем курсе[1]).

Далее, в книге 10-й, которая со своим геометрическим способом выражения особенно тяжеловесна и трудна для понимания, изложена геометрическая классификация иррациональностей, представимых в квадратных радикалах в той форме, в какой она позже применяется для их геометрического построения.

Только теперь, в 11-й книге, встречаем начала стереометрии. Как видите, Евклид отнюдь не „фузионист". Напротив, он отодвигает стереометрию от планиметрии на сколько возможно дальше, тогда как мы теперь в согласии с часто упоминавшимися „фузионистскими стремлениями" считаем правильным развивать возможно раньше пространственное представление в целом и для этого с самого начала приучать ученика к трехмерным фигурам вместо того, чтобы сперва искусственно прививать ему ограничение плоскостью.

В 12-й книге снова встречаемся с общими исследованиями иррациональных величин, которые становятся необходимыми для определения объема пирамиды и других тел. Речь идет здесь о завуалированном применении понятия предела в так называемом доказательстве по методу исчерпания (или истощения), с помощью которого строго устанавливаются пропорции между иррациональными величинами. Впрочем, сперва этот метод применяется для доказательства того планиметрического предложения, что два круга

[1]) См. т. I, стр. 61.

относятся, как квадраты их радиусов. На этом примере я хочу также в двух словах уложить основную мысль упомянутого метода. К каждому кругу можно все лучше и лучше приближаться с помощью вписанных и описанных n-угольников с бесконечно растущим числом сторон, так сказать, „исчерпывая" его, в том смысле, что площадь многоугольника будет отличаться сколь угодно мало от площади круга. Если бы вышеупомянутая пропорция не имела места, то легко можно было бы притти к противоречию с тем фактом, что каждый вписанный многоугольник меньше круга, а каждый описанный— больше него [1]) (рис. 125).

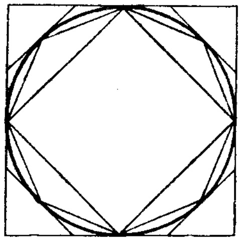

Рис. 125.

Наконец, в 13-й книге излагается теория правильных тел; эта теория увеличивается доказательством, основанным на материале, накопленном в 10-й книге, того, что все эти тела, т. е. длины их ребер, могут быть построены с помощью циркуля и линейки. Такое завершение „Начал" соответствует тому особенному интересу, который правильные тела с древних времен представляли для греческих философов.

После приведенного общего обзора содержания „Начал" займемся согласно нашему первоначальному намерению более близким рассмотрением тех глав Евклида, которые трактуют об основах геометрии. Совершенно очевидно, что идеальной целью, манившей Евклида, был свободный от пробелов чисто логический вывод всех геометрических теорем из полностью наперед устанавливаемых посылок. В создании (либо в передаче) этого идеала заключается, без сомнения, ядро исторического значения „Начал". Но в действительности Евклиду никоим образом не удалось достигнуть этой высокой цели, и как раз в исследованиях, относящихся к основам геометрии, современная наука достигла существенно более глубокого понимания

[1]) Об отношении доказательства по методу исчерпания к современному взгляду на предел ср. т. I, стр. 342. [См. также в упомянутой „Истории математики" Цейтена, стр. 112 и сл.)].

и вскрыла неясности у Евклида. Однако — такова сила традиций! — еще и теперь изложение Евклида многие считают, в особенности в Англии, непревзойденным образцом обоснования геометрии. Смешивают историческое значение творения с его абсолютным, всегда сохраняющимся значением, поэтому будет только естественным, если, в противовес подобной переоценке „Начал“ Евклида, я в последующей критике особенно подчеркну отрицательные стороны, те места, где изложение Евклида более не в состоянии удовлетворить нашим требованиям.

Конечно, всякая подобная критика Евклида сопряжена с особенной трудностью, происходящей от неуверенности в достоверности текста. Многое основано на свидетельствах уже упоминавшегося Прокла, и это еще самый древний источник; а самые старые списки, которыми мы обладаем, написаны в IX в. н. э., т. е. они на 1200 лет моложе Евклида! К тому же они чрезвычайно отличаются друг от друга и притом часто как раз в тех местах принципиального значения, которые для нас здесь особенно важны. К этому присоединяется еще традиция латинских и арабских переводчиков и комментаторов, у которых всегда имеются значительные отклонения, вызванные желанием разъяснить текст. Таким образом установление как можно более надежного текста „Начал“ является крайне сложной филологической проблемой, на которую, действительно, затрачено невероятно много проницательности. Необходимо только отдавать себе ясный отчет в том, что в результате подобной филологической работы может получиться в лучшем случае *вероятнейший текст*, который, разумеется, может и не быть *действительным оригинальным текстом*; ибо нет никакой необходимости в том, чтобы то, что мы получаем на основе многих показаний, как нечто наиболее вероятное, совпадало бы во *всех* пунктах с действительностью. По общему мнению на высоте современной филологической науки стоит текст Гейберга, и лучшее, что мы, не филологи, можем сделать, это положить его в основу нашего изложения, хотя мы согласно с вышесказанным никогда не должны забывать, что этот текст отнюдь не должен быть тождественным с первоначальным. Поэтому, если в названном тексте окажутся недостатки и противоречия, то всякий раз будет оставаться под сомнением, виноват ли в них сам Евклид или же они проскользнули только благодаря позднейшей передаче.

Приступая к намеченному исследованию, рассмотрим прежде всего, какую форму принимают **обоснование геометрии в 1-й книге** „Начал". Евклид начинает эту книгу с трех групп предложений, которые он называет ὅροι (definitiones) αἰτήματα (postulata), Κοιναὶ ἔννοιαι (communes animi conceptiones), что может быть передано, примерно, словами: **определения** (Erklärungen), **требования** (Forderungen) и принципы (Grundsätze) [1]. Однако для последней группы обыкновенно употребляют, следуя Проклу, термин „**аксиомы**", который, впрочем, теперь, как известно, получил более широкое значение, включающее в себя также и постулаты.

Чтобы прежде всего понять содержание **определений**, вспомним, как мы поступали раньше при обосновании геометрии. Мы говорили тогда, что мы не в состоянии дать определение некоторых вещей, каковы точки, прямые, плоскости, а должны допустить их как знакомые всякому человеку основные понятия и должны только четко высказать те их свойства, которые мы желаем использовать; после этого мы могли приступить к построению геометрии вплоть до координатной системы x, y, z аналитической геометрии. Только после этого мы установили общее понятие кривой, положив x, y, z равными непрерывным функциям параметра t. При случае я указывал, что это понятие охватывает также и такие удивительнейшие „выродки", как, например, кривые, которые сплошь покрывают некоторую площадь и т. п.

Евклиду чуждо такое осторожное или самоограничительное понимание вещей. Он начинает с „определения" (или „объяснения", Erklärung) всевозможных геометрических понятий, каковы **точка**, **линия**, **прямая**, **поверхность**, **плоскость**, **угол**, **круг** и т. д. Первое „определение" гласит: „**точка есть то, что не имеет частей**" (буквально: „то, чего часть есть ничто"). Но мы едва ли можем признать это за определение в соб-

[1] Точнее: „общие понятия" (или сведения) (у Цейтена „notions communes").

ственном смысле слова, так как точка ни в коем случае не может быть определена только этим свойством. Далее, читаем: „линия есть длина без ширины“. Здесь представляется сомнительною даже самая правильность утверждения, если мы признаем только что указанное общее понятие кривой, о котором Евклид, конечно, еще ничего не знал. В третьих, дается определение прямой, как такой линии, которая одинаково (равномерно) расположена относительно своих точек. Смысл этого предложения совершенно темен, и под ним можно разуметь все, что угодно. Оно могло бы означать, что прямая всюду имеет одинаковое направление, и тогда нужно было бы признать направление за основное понятие, привычное для каждого человека. Но мы можем его понимать также и в том смысле, что прямая, если представить ее себе реализованной в виде твердого стержня, при определенных движениях пространства всегда совпадает сама с собой, а именно при вращениях около нее же самой, как около оси, и при таком понимании евклидова определения пришлось бы, конечно, снова предполагать известным понятие движения. Делает ли это Евклид, является очень спорным вопросом, на котором мы еще остановимся подробнее. Во всяком случае, не удалось найти однозначной интерпретации для данного Евклидом определения прямой, как и для многих из дальнейших его определений, на отдельном рассмотрении которых я не буду здесь больше останавливаться.

Мы переходим теперь к постулатам, которых в издании Гейберга имеется пять. Они требуют, чтобы было возможно:

a) провести прямую от любой точки до любой другой точки;

b) неограниченно продолжить ограниченную прямую;

c) описать из данного центра окружность, которая прошла бы через данную точку[1]).

---

[1]) [Хотя в греческом тексте этот постулат формулирован несколько иначе, а именно: „описать из любого центра окружность любым радиусом“, однако из дальнейшего евклидова текста (см. 329) видно, что этот постулат надо понимать именно в том более узком смысле, какой содержится в формулировке Клейна.]

Четвертый постулат я оставляю пока в стороне, а приведу сразу же пятый, так называемый постулат о параллельных линиях: d) если две прямые образуют с третьей по одну ее сторону внутренние углы, сумма которых меньше развернутого угла, то такие прямые пересекаются при достаточном продолжении с этой стороны (рис. 126).

Эти постулаты выражают выполнимость известных построений или существование геометрических образов, которыми Евклид действительно

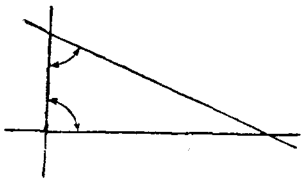

Рис. 126.

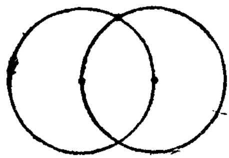

Рис. 127.

пользуется в своем дальнейшем изложении. Однако в геометрии имеется еще целый ряд подобных постулатов существования, которые из названных не вытекают чисто логически, но которыми Евклид также пользуется. Для примера укажу только на такое предложение: два круга, каждый из которых проходит через центр другого, пересекаются (рис. 127). Я мог бы привести еще целый ряд подобных же предложений. Поэтому мы должны, во всяком случае, признать систему постулатов Евклида неполной.

Теперь приведем четвертый постулат:

d) все прямые углы равны между собой.

Много спорили о том, как следует понимать этот постулат и как он вообще попал сюда. Это связано с весьма важным вопросом о том, пользуется ли Евклид понятием движения или нет. Если последовательно исходить из понятия движения фигур как твердых тел — так мы поступали при нашем первом построении геометрии, — то этот постулат оказывается (ср. стр. 289) необходимым логическим следствием и был бы, если только Евклид стоял на такой точке зрения, здесь совершенно не нужен. Но ни в одном из всех других основных положений Евклида не говорится явно о движении, так что многие толкователи считают, что этот четвертый постулат как раз и должен служить для введения идеи движения, но уж во всяком случае, как пришлось бы тогда признать, в несовершенной форме.

В противоположность этому большинство комментаторов Евклида полагает, что вследствие известных философских соображений одно из наиболее существенных стремлений Евклида как раз и было направлено на принципиальное устранение из геометрии понятия движения. Но тогда исходным пунктом должно было бы служить абстрактное понятие конгруэнтности, как в нашем втором построении, и тогда снова этот четвертый постулат должен был бы считаться основой для учения о конгруэнтности. При этом, конечно, возникает вопрос, почему не сделано аналогичных указаний также и относительно конгруэнтности отрезков. Но мы сейчас же увидим, какие существенные трудности возникают в случае как одной, так и другой точки зрения в дальнейшем изложении Евклида.

Остается еще заметить, что ни то ни другое толкование не объясняет по-настоящему, почему это предложение помещено именно среди постулатов (с их общей тенденцией, охарактеризованной выше). Это побудило Цейтена к такой интересной попытке объяснения, которое, конечно, не вполне убедительно: рассматриваемый постулат должен выражать, что то продолжение отрезка за один из его концов, которое вообще возможно согласно постулату b), определяется однозначным образом. Подробности вы можете найти в упомянутой книге Цейтена „История математики в древности и в средние века“ [1]). Наконец, остается, как всегда, тот выход из затруднения, что здесь признают наличие искажения текста. Многие, действительно, так и думают, и против этого нечего возражать.

Обращаюсь, наконец, к аксиомам (Grundsätzen), которых у Гейберга насчитывают тоже пять.

---

[1]) Стр. 91 русского издания.

a) равные одному и тому же третьему равны также и между собой [1]); если $a = b$, $b = c$, то $a = c$;

b) если к равным прибавляются равные, то и целые равны [2]); если $a = b$, $c = d$, то $a + c = b + d$;

c) если $a = b$, $c = d$, то $a - c = b - d$ [3]);

d) налагающиеся друг на друга равны;

e) целое больше части: $a > a - b$.

Четыре из этих аксиом имеют логическую природу, и в данном случае они должны, очевидно, констатировать то, что выражаемые ими общие отношения имеют место также и для всех рассматриваемых геометрических величин (отрезков, углов, площадей и т. д). Четвертая же аксиома говорит о том, что в конечном счете решающим моментом для равенства или неравенства является „конгруэнтность“ или „совпадение при наложении“, хотя опять-таки остается, конечно, неясным, предполагается ли здесь идея движения или нет.

Что же касается различия между аксиомами и постулатами, то Симон (Simon) формулировал его в том смысле, что первые связаны с простейшими фактами логики, а вторые — с простейшими фактами пространственой интуиции. Это было бы очень удачным и вразумительным решением вопроса, если бы только мы были убеждены в том, что расположение текста у Гейберга в точности соответствует оригиналу. Но в действительности в рукописях встречаются очень существенные уклонения в расположении и в содержании постулатов и аксиом, которые никак не укладываются в схему Симона; в частности, например, постулат параллелей часто фигурирует в качестве 11-й аксиомы.

Теперь мы рассмотрим подробнее начало евклидова построения геометрии, которое возведено на этих определениях, постулатах и аксиомах, а именно первые четыре параграфа, которые следуют за аксиомами. При этом мы сможем одновременно сделать интересные

---

[1]) В греческом оригинале нет слова „величины“, обыкновенно вводимого в переводах этой аксиомы.

[2]) [Перевожу буквально с греческого; Клейн перефразирует так: „равное, увеличенное на равное, дает равное“.]

[3]) У Гейберга: „если от равных отнимаются равные, то остатки равны“.

наблюдения относительно понимания Евклидом основ, в частности, по вопросу об его отношении к идее движения.

Первые три параграфа имеют целью решение задачи: отложить данный отрезок AB на другом отрезке CF, начиная от точки C. Каждый человек выполнит это на практике, конечно, путем непосредственного переноса с помощью циркуля или полоски бумаги, т. е. помощью сдвига твердого тела в плоскости. Не так смотрит на дело Евклид в своих теоретических рассуждениях. Дело

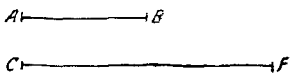

Рис. 128.

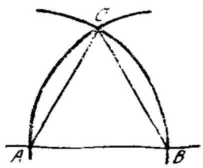

Рис. 129.

в том, что в своих постулатах он не предполагает построения, которое соответствовало бы такому свободно перемещаемому циркулю, а его постулат с (стр. 324) позволяет только описать около заданной точки окружность, если дана уже какая-нибудь одна ее точка. И вот, желая применять только те возможности, какие обеспечиваются его постулатами, он должен такое, повидимому, простое построение разбить на большее число более сложных, но во всяком случае в высшей степени остроумных шагов:

1. Построить на данном отрезке AB равносторонний треугольник. Согласно постулату с) можно из точки A описать окружность радиусом AB, а из B—радиусом BA. То, что эти окружности пересекутся в некоторой точке C, принимается, конечно, как мы уже упоминали, без дальнейших разъяснений. А теперь следует строгое формально логическое доказательство с использованием аксиом того, что ABC представляет собою действительно равносторонний треугольник.

2. Отложить от данной точки C отрезок, равный данному отрезку AB (рис. 130). Строим согласно 1 на AC равносторонний треугольник ACD.

Затем продолжаем DA за точку A [постулат b)] и описываем из A окружность радиусом AB [постулат с)] до пересечения в точке B' с DA (существование этой точки пересечения и на этот раз особо не оговаривается). Наконец, описываем из точки D окружность радиуса DB' до пересечения ее с продолжением DC в точке E; тогда $CE = AB$. Доказательство этого вывода, ход которого легко себе представить, проводится снова вполне строго.

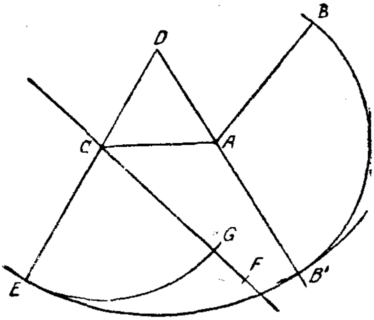

Рис. 130.

3. Даны два отрезка AB, CF, причем $CF > AB$ (рис. 130); отложить на CF от точки C отрезок, равный AB. Строим, следуя 2, от C какой-нибудь отрезок $CE = AB$ и проводим из C окружность радиуса CE, которая пересечет CF в точке G: CG и есть искомый отрезок.

Этим решена упомянутая задача. После этого Евклид дает под № 4 первую теорему о конгруэнтности.

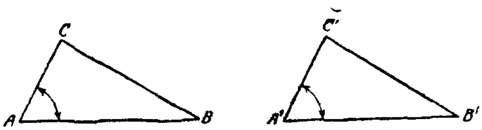

Рис. 131.

Если у двух треугольников ABC и $A'B'C'$ имеется по две соответственно равные стороны ($AB = A'B'$, $AC = A'C'$) и по равному заключенному между ними углу ($A = A'$), то попарно равны и все другие соответственные элементы (рис. 131). При доказательстве этого предложения Евклид впадает по сравнению с предыдущим построением в ту удивительную непоследовательность, из-за которой я и воспроизвожу здесь все эти рассуждения. Он представляет себе треугольник $A'B'C'$ наложенным так на ABC, что стороны $A'B'$, $A'C'$ и угол A' совпадают соответственно со сторонами AB, AC и углом A. Хотя мы только что и научились очень точно откладыванию одного какого-нибудь отрезка на другом, но об откладывании углов еще не было речи и еще гораздо меньше было сказано что-либо о том, что станется при подобном процессе перенесения с третьей стороною $B'C'$, — останется ли она, например, вообще при этом прямолинейной. Интуитивно это, конечно, ясно, но ведь вся цель Евклида как раз и заключается всегда в логической полноте дедукции. Однако он без каких-либо более детальных рассуждений заключает, что прямая $B'C'$ при описанном накладывании тоже должна перейти в прямую, которая в таком случае должна, конечно, совпасть с BC. Но это значит предполагать решительным образом существование движений, которые не изменяют ни формы, ни размеров геометрических фигур, как мы поступали при нашем первом построении геометрии; тогда, во всяком случае, становится очевидным, что первое предложение о конгруэнтности является доказуемым.

Таким образом это доказательство Евклида, казалось бы, говорит вполне определенно за то, что он был приверженцем идеи движения. Но тогда возникает вопрос, почему об этом ничего не говорится в аксиомах и уже тогда во всяком случае было бы совершенно бесцельным его крайне искусственное решение задач 2 и 3, так как, пользуясь идеей движения, их можно решить в двух словах. Если же рассматривать № 4 как позднейшую вставку, то остается открытым вопрос, как относился Евклид к первому предложению о конгруэнтности, и вместе с тем остается существенный пробел в его построениях; без понятия движения доказать это предложение невозможно, и его приходится, как это мы сделали в нашем втором построении геометрии (стр. 288), включить в число аксиом. Во всяком случае, заканчивая эти наши замечания, мы можем только сказать, что как раз в первых предложениях первой книги „Начал“ возникает так много внутренних трудностей, что о достижении идеала, как мы его наметили выше, совершенно не может быть речи.

Но существенно более веским, чем все эти пробелы и неясности, является другой упрек, который приходится высказать по поводу изложения основ у Евклида, если прилагать к нему мерку его же собственного идеала, не теряя при этом из виду наших современных знаний. А именно Евклид, если говорить сперва на привычном нам аналитическом языке, никогда не рассматривает своих геометрических величин (отрезки, углы, поверхности и т. д.) со знаком ($\pm$), но всегда обращается со всеми ними как с абсолютными величинами; он строит как бы аналитическую геометрию, в которой координаты и прочие величины входят только по своему абсолютному значению. Следствием этого является то, что он не может достигнуть установления общезначимых теорем, но всегда должен проводить различение отдельных случаев в зависимости от того, как именно в каждом конкретном случае расположены части фигуры.

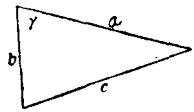

Рис. 132.

В качестве простого примера может служить так называемая расширенная теорема Пифагора, которая на нашем современном языке формул гласит (рис. 132):

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$

и имеет место как для остроугольных, так и для тупоугольных треугольников, так как мы можем соответственно смыслу считать $\cos\gamma$ положительной или отрицательной величиной. Но Евклид знает только абсолютное значение $|\cos\gamma|$ и поэтому он должен бы в этих двух случаях применять две различные формулы:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\,|\cos\gamma|, \quad c^2 = a^2 + b^2 + 2ab\,|\cos\gamma|.$$

Естественно, что подобное различение отдельных случаев становится тем более сложным и запутанным, чем дальше мы идем.

Можно, конечно, тот недостаток, о котором идет речь, формулировать и чисто геометрически. Различию в знаке при аналитическом изложении соответствует в чистой геометрии различие в расположении, а именно такого типа: C лежит либо между A и B, либо вне отрезка AB. Возвести полное логическое здание геометрии возможно только в том случае, если явно и отчетливо формулировать основные факты этих соотношений положения или так называемые „Аксиомы расположения" (Axiome des Zwischen), как мы это уже подчеркивали в нашем и первом и втором построении геометрии. А не выполнив этого, подобно Евклиду, мы не достигнем идеала чисто логического овладения геометрией и должны будем всегда снова обращаться к чертежу для проверки соотношений положения. Итак, коротко говоря, наш упрек Евклиду состоит в том, что у него нет аксиом расположения.

В действительности лишь сравнительно недавно поняли, что должно формулировать определенные предположения относительно понятия „между", другими словами, что элементарно-геометрические величины должно снабжать согласно известным условиям знаком плюс или минус. В начале моего курса (стр. 37), когда мы подробно занимались этим вопросом, я сообщил вам, что первое последовательное проведение правил знаков встречается в „Барицентрическом исчислении" Мебиуса 1827 г. Далее, в этом отношении представляет исторический интерес одно место из письма Гаусса к В. Больяи от 6 марта 1832 г., которое, однако, впервые стало известным только в 1900 г., после его опубликования в VIII томе сочинений Гаусса (стр. 222), и гласит так: „При полном проведении (Durchführung) такие слова, как „между", тоже следует сперва свести к ясным понятиям, что очень хорошо можно сделать, но чего я нигде не нахожу осуществленным".

Первую точную геометрическую формулировку этих „аксиом расположений" дал М. Паш (M. Pasch) в 1882 г. в своих „Лекциях по Новой геометрии"[1]).

Прежде всего здесь впервые встречается такое предложение, которое мы уже раньше отчетливо формулировали и использовали при нашем первом построении геометрии:

Если прямая пересекает одну какую-нибудь сторону треугольника, то она пересекает и одну из двух других его сторон. Не следует недооценивать значение этих аксиом расположения; они столь же важны, как и все другие аксиомы, если мы действительно желаем построить геометрию, как

[1]) „Vorlesungen über neuere Geometrie", Leipzig 1882, 2. Aufl., 1912.

логическую науку, которая не нуждалась бы неизбежным образом для установления своих выводов в апеллировании к интуиции и чертежам *после установления аксиом* (хотя такое апеллирование всегда будет, разумеется, побуждать и помогать во время исследовательской работы).

Евклид, у которого нет этой аксиомы, всегда вынужден возиться с различением частных случаев при помощи чертежей, а так как он, с другой стороны, придает так мало значения правильности геометрического чертежа, то всегда приходится опасаться того, что ученик Евклида, пользуясь неверно начерченными фигурами, придет как-нибудь к ложным предложениям. Так возникают многочисленные так называемые *геометрические формулы*; они являются формально правильными во всем прочем доказательствами неверных теорем, но только они базируются на плохо начерченных, т. е. противоречащих аксиомам расположения, фигурах. Я охотно приведу один пример, который, наверное, многим из вас известен, а именно *доказательство того, что всякий треугольник является равнобедренным*.

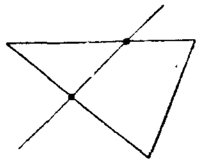

Рис. 133.

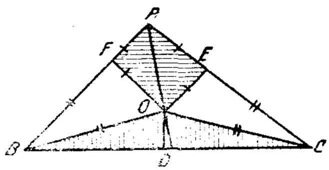

Рис. 134.

Прежде всего проводим биссектрису угла A и перпендикуляр в середине D стороны BC. Если бы обе линии были параллельны, то биссектриса была бы перпендикулярна к BC и треугольник был бы равнобедренным. Можно, следовательно, считать, что эти две прямые пересекаются, причем мы будем различать два случая, смотря по тому, находится ли точка пересечения O внутри или вне треугольника.

В обоих случаях мы проводим OE и OF перпендикулярно к AC и AB и соединяем O с B и C.

В первом случае (рис. 134) горизонтально заштрихованные треугольники AOF и AOE конгруэнтны, так как у них есть общая сторона AO, а углы при A и прямые углы попарно равны; отсюда

$$AF = AE.$$

Точно так же и вертикально заштрихованные треугольники OCD, OBD конгруэнтны, так как у них есть общая сторона OD, равные стороны DC и DB и равные прямые углы. Следовательно, $OC = OB$, откуда, далее, заключаем, пользуясь равенством $OE = OF$, вытекающим из конгру-

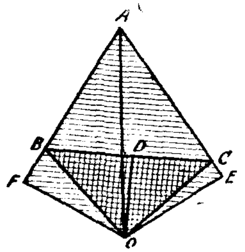

Рис. 135.

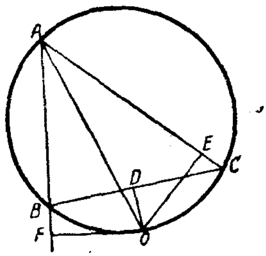

Рис. 136.

энтности первой пары треугольников, что незаштрихованные [прямоугольные] треугольники OCE и OBF также конгруэнтны; поэтому

$$FB = FC,$$

а сложение с полученным раньше равенством и дает нам, действительно, равенство $AC = AB$.

Если же в другом случае точка O лежит вне треугольника (рис. 135), то убеждаемся, совершенно подобно предыдущему, в конгруэнтности 3 пар соответствующих треугольников и находим, в частности:

$$AF = AE, \quad FB = EC.$$

С помощью вычитания отсюда следует, как показывает чертеж, что опять $AB = AC$, и таким образом равнобедренность треугольников была бы доказана в каждом случае.

В этом доказательстве неверен, действительно, только чертеж. А именно, во-первых, точка O никогда не может лежать внутри треугольника, а затем, никогда не может иметь места расположение, изображенное на чертеже во втором случае, но всегда одно из двух оснований перпендикуляров E, F должно лежать внутри, а другое вне той стороны треугольника, на которую опущен соответственный перпендикуляр, как это изображено на рис. 136. Итак, в действительности получается, например, что

$$AB = AF - BF,$$

$$AC = AE + CE = AF + BF,$$

и мы никак не можем вывести заключения о равенстве.

Этим полностью разъяснен софизм и совершенно аналогичным образом могут быть распутаны и многие другие общеизвестные мнимые доказательства; всегда в основу их аргументации кладутся неправильные чертежи с обратным действительному расположением точек и прямых.

Подвергнув критике существенные недостатки в изложении Евклида, я хочу, с другой стороны, подчеркнуть также одну из наибольших его тонкостей, которая так же ускользала от внимания большинства вышеупомянутых воодушевленных приверженцев Евклида, как и его ошибки.

Я уже указывал, что в 5-й книге рассматривается отношение (λογοσ) любых двух геометрических величин a, b, которое дает эквивалент общего понятия о числе. Но при этом Евклид четко формулирует, что он будет говорить об отношении двух однородных геометрических величин a, b только при одном определенном условии: а именно только в том случае, если можно определить два целых числа m и n таким образом, чтобы было $ma > b$ и $a < nb$; вот его слова: „Величины имеют отношение [одна к другой], если кратное каждой из них может превзойти другую величину". Теперь это требование называют аксиомой Архимеда, хотя это название исторически совершенно неправильно, так как им владел уже задолго до Архимеда Евклид и, вероятно, даже еще раньше Евклида Евдокс. В последнее время все чаще употребляется также название „аксиома Евдокса".

Эта архимедова аксиома играет в современных исследованиях по основам как геометрии, так и арифметики большую роль как один из важнейших постулатов непрерывности. Соответственно этому и мы уже несколько раз касались ее в нашем собственном изложении. В частности, вы сразу поймете, что тот постулат нашего первого построения геометрии, согласно которому точки, получаемые из A при повторении некоторого сдвига, оставляют позади себя всякую точку полупрямой (стр. 267), по существу вполне совпадает с архимедовой аксиомой. Но уже в первой части нашего курса[1]) мы тоже подробно говорили об этой аксиоме. Там мы назвали величину a, которая по умножении на любое конечное число n всегда остается меньше b, актуально бесконечно малой по отношению к b или, наоборот, b актуально бесконечно большой по отношению к a. Таким образом, Евклид исключает посредством своего требования, системы геометрических величин, которые содержат актуально бесконечно малые или бесконечно большие элементы. Исключение подобных сис тем является, действительно, необходимым, если хотят обосновать учение о пропорциях, которое ведь в итоге является, как уже часто было отмечено, не чем иным, как другой формой современной теории иррациональных чисел. Так что в данном случае Евклид (или, пожалуй, уже и Евдокс) поступает в основном так же — и это как раз и поразительно, — как поступают в современных исследованиях понятия числа, и при этом Евклид пользуется в точности теми самыми вспомогательными средствами [какими пользуемся и мы теперь].

Мы лучше всего поймем значение аксиомы, о которой здесь идет речь, если рассмотрим одну совершенно конкретную, не удовлетворяющую ей систему геометрических величин, которая особенно интересна еще и потому, что она уже в древности и в средние века была хорошо известна и вызывала много споров. Я имею здесь в виду так называемые „роговидные углы“ (hornförmige Winkel), т. е. углы между кривыми, понимаемые в известном расширенном смысле.

---

[1]) См. т. I, стр. 327.

Когда мы говорим теперь об углах, то всегда представляем себе углы между прямыми линиями и, в частности, понимаем под углом между двумя кривыми не что иное, как угол между их *касательными* (рис. 137); поэтому угол между кривой, например, окружностью, и касательной к ней при таком понимании всегда равен нулю. При

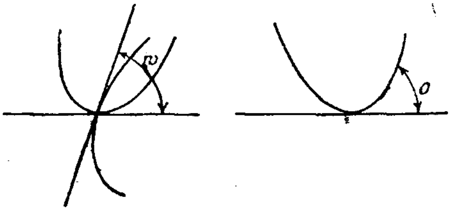

Рис. 137.

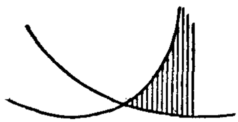

Рис. 138.

таком понимании все углы образуют, как известно, обыкновенную „архимедову“ систему величин, в которой можно применять евклидову теорию пропорций и которую поэтому, говоря другими словами, можно измерять при помощи простого линейного ряда вещественных чисел.

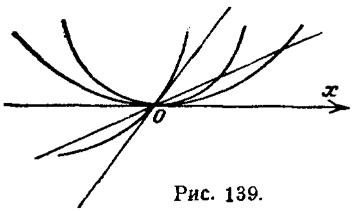

Рис. 139.

В противоположность этому под *роговидным углом двух кривых* понимают (рис. 138) *часть плоскости, заключенную* между самими кривыми вблизи точки их пересечения (или касания).

Как мы сейчас увидим, это определение приводит к неархимедову, т. е. не удовлетворяющему аксиоме Архимеда, понятию о величине. Ограничимся при этом углами, *одной из сторон которых является некоторая неподвижная прямая* (x-ось) и общей вершиной которых служит начало координат O; другой же стороной пусть будет окружность (или также при известных обстоятельствах прямая), которая в точке O пересекает x-ось или касается ее (рис. 139). Тогда будет вполне естественным из двух роговидных углов назвать *мень-*

шим тот, свободная (т. е. отличная от Ox) сторона которого при приближении к O в конце концов проходит под [1]) [свободною] стороною другого, т. е тот угол, который при этом в конце концов ограничивает более узкую часть плоскости. Поэтому, например, угол образуемый соприкасающеюся окружностью, всегда будет меньше, чем угол, образуемый (с x-осью) пересекающейся окружностью или прямою, а из двух окружностей, касающихся x-оси в точке O окружность большего радиуса образует меньший угол, так как она проходит под первой. Ясно, что этим вполне определяется, какой из любых двух роговидных углов рассматриваемого типа меньше и какой больше. Совокупность всех роговидных углов [имеющих x-ось одной из своих сторон] оказывается, как говорят теперь в теории множеств просто [или линейно] упрядоченною (einfach geordnet) по их величине аналогично совокупности всех обыкновенных действительных чисел.

Но чтобы обнаружить характерное различие между этими двумя множествами, мы должны дать более точные указания относительно измерения роговидных углов.

Во-первых, будем измерять угол, образуемый [с x-осью] прямою, проходящею через O, в обыкновенной угловой мере; тогда каждый угол a, образуемый какою-нибудь окружностью, касающеюся x-оси, будет по определению меньше любого, сколь угодно малого, отличного от нуля, прямолинейного угла, и уже это не может иметь места в обыкновенном числовом континууме ни для какого a, отличного от нуля, и характеризует a, как „актуально бесконечно малую".

Чтобы проследить это в связи с аксиомой Архимеда, мы сперва должны еще дать для этих криволинейных углов определение умножения на целое число. Если начать с рассмотрения окружности радиуса R, касающейся [x-оси] в точке O, то вполне естественно приписать n-кратный угол касательной окружности ради-

---

[1]) [Здесь Клейн имеет в виду, конечно, такие углы, вторые (свободные) стороны которых проходят над x-осью; в общем же случае следует сказать, вместо „под стороною" — „между сторонами" другого угла.]

уса $\frac{R}{n}$. Действительно, это определение не противоречит предыдущему определению, поскольку по этому последнему углы касательных окружностей, имеющих радиусы $R_1 \frac{R}{2}, \frac{R}{3}$, последовательно увеличиваются. Таким образом при умножении угла a какой-нибудь касательной окружности на целое число всегда снова получаются углы касательных окружностей, и все эти кратные na остаются согласно нашему определению по необходимости

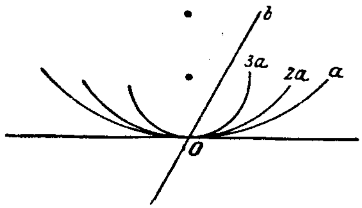

Рис. 140.

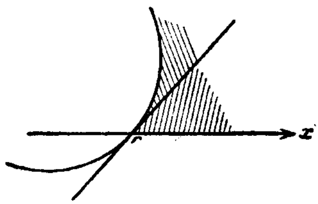

Рис. 141.

меньше, чем, скажем, угол b некоторой неподвижной секущей прямой, каким бы большим мы ни брали число n (рис. 140). Итак, здесь аксиома Архимеда действительно не удовлетворена; поэтому углы соприкасающихся окружностей нужно рассматривать, как актуально бесконечно малые по сравнению с углом любой пересекающей прямой. Что же касается сложения двух таких углов, то в согласии с данным определением умножения угла на целое число для выполнения его складывают обратные величины радиусов, которые вообще служат здесь мерой актуально бесконечно малых углов.

Если же мы имеем произвольную окружность, проходящую через O (рис. 141), то под углом ее (с x-осью) можно понимать сумму угла, образуемого касательной к ней с x-осью (и измеренного в обычном смысле), и ее собственного актуально бесконечно малого угла с ее касательною в только-что определенном смысле. Тогда можно сложение и умножение подобных углов свести к тем же действиям над их отдельными слагаемыми, чем вполне определяется производство операций над роговидными углами. Но в этой области аксиома Архимеда не имеет места; поэтому здесь оказываются недостаточными „Logoi" [отношения] или обыкновенные ещественные числа. Вероятно, это хорошо было известно Евклиду (или даже Евдоксу), и он вполне сознательно исключает подобные системы величин посредством своей аксиомы.

Пользуясь современными средствами, можно существенно расширить область этих роговидных углов, причем определения еще более обобщаются и одновременно упрощаются, а именно в том случае, если рассматривать все аналитические кривые, проходящие через O. Каждая такая кривая изображается степенным рядом:

$$y_1 = \alpha_1 x + \beta_1 x^2 + \gamma_1 x^3 + \ldots,$$
$$y_2 = \alpha_2 x + \beta_2 x^2 + \gamma_2 x^3 + \ldots$$

Мы будем говорить, что угол кривой *1* с x-осью больше или меньше угла кривой *2* с тою же осью, смотря по тому, будет ли $\alpha_1 > \alpha_2$ или $\alpha_1 < \alpha_2$; если же $\alpha_1 = \alpha_2$, то решение вопроса зависит прежде от соотношения $\beta_1 \gtrless \beta_2$, а в случае, если $\beta_1 = \beta_2$, то от соотношения $\gamma_1 \gtrless \gamma_2$ и т. д. Ясно, что этим мы расположили углы всех аналитических кривых в одну определенную однократно линейно упорядоченную последовательность, в которой, очевидно, содержатся также и углы окружностей, расположенные определенным выше образом.

Теперь мы можем условиться считать n-кратной величиной угла кривой *1* с x-осью тот угол, который образует с x-осью кривая, определяемая рядом $n \cdot y_1 = n\alpha_1 x + n\beta_1 x^2 + \ldots$, полученным из ряда для y_1 умножением его на n.

Прежде мы должны были применять более сложную операцию, чтобы не выйти за пределы совокупности окружностей, а именно, мы заменяли касательную окружность радиуса R с разложением:

$$y = \frac{x^2}{2R} + \frac{x^4}{8R^3} + \ldots,$$

окружностью радиуса $\frac{R}{n}$:

$$y = n\frac{x^2}{2R} + n^3\frac{x^4}{8R^3} + \ldots,$$

что действительно только для первого члена разложения является умножением на n. Но и по новому более простому определению мы получаем снова неархимедову систему величин: кривая, разложение которой начинается с x^2 ($\alpha_2 = 0$), по умножении на сколь угодно большое n всегда будет образовывать угол меньший, чем угол кривой, в разложении которой α_1 отлично от нуля. По существу мы здесь повторили в несколько более наглядной форме только то, что мы уже проделали в первом томе[1]). В разложении в степенной ряд:

$$y = \alpha x + \beta x^2 + \gamma x^3 + \ldots$$

последовательные степени x, x^2, $x^3, \ldots$ играют при этом толковании просто роль актуально бесконечно малых величин различного, все возрастающего порядка.

Интересно, что последовательность роговидных углов можно уплотнить еще более, если присоединить к ней некоторые неаналитические кривые. Но только, чтобы было возможным сравнивание по величине, они не должны бесконечно часто осциллировать (т. е. иметь бесконечно много колебаний) или, выражаясь точнее, не должны пересекать какую-либо аналитическую кривую бесконечное число раз. Достаточно будет привести здесь в качестве примера кривую $y = e^{-\frac{1}{x^2}}$. Она, как известно, обладает тем свойством, что все ее производные исчезают при $x = 0$ (так что в этом месте ее вообще нельзя разложить в степенной ряд); поэтому она в конце концов оказывается под любой аналитической кривой. Следовательно, хотя мы уже раньше имели повсюду плотную последовательность роговидных углов, теперь мы имеем еще один роговидный угол, который

[1]) Ср. т. I, стр. 326 (355) и сл., где подобные величины различных порядков обозначены через η, ζ, ...

вместе со всеми своими конечными кратными меньше, чем угол любой аналитической кривой [с x-осью]!

На этом мы закончим эти соображения и вообще наше изучение Евклида. Я только резюмирую в заключение в виде нескольких положений то суждение о „Началах" Евклида, к которому нас приводят все эти размышления:

1. Великое историческое значение „Начал" Евклида состоит в том, что они передали последующим временам идеал вполне (беспробельно) логической обработки геометрии.
2. Что касается выполнения, то многое проделано очень тонко, но многое другое оказывается принципиально отсталым с точки зрения наших современных взглядов.
3. Многочисленные важные детали — в том числе в начале первой книги — вследствие ненадежности текста остаются сомнительными.
4. Все изложение оказывается часто излишне тяжеловесным, так как Евклид не имел в своем распоряжении готовой арифметики.
5. Вообще одностороннее подчеркивание логического затрудняет понимание всего содержания в целом и его внутренних связей.

Наше собственное отношение к обоснованию геометрии я хочу охарактеризовать еще тем, что я еще раз сопоставлю те две точки зрения, которые уже фигурировали в различных местах.

Одна из них связана с тем фактом, что мы могли построить геометрию, следуя совершенно различными путями. Два таких пути мы рассмотрели более подробно. При одном построении мы выдвигали на первое место понятие группы движения, в частности группы сдвигов, а при другом начинали с аксиомы конгруэнтности и отодвигали параллельность на гораздо более позднее место.

Это противопоставление очень хорошо оттеняет ту свободу, какую мы имеем при аксиоматическом обосновании геометрии. И как раз это следует здесь еще раз особенно подчеркнуть ввиду тех нетерпеливых утверждений, с которыми часто приходится встречаться в этом вопросе и которые имеют целью выставить то или другое основное понятие, особенно отвечающее вкусу автора, как абсолютно простейшее и единственно пригодное для обоснования геометрии. В действительности же источником всех геометрических основных понятий и аксиом является наивное геометрическое созерцание (интуиция). Из этого созерцания мы почерпаем те данные, какие кладем в надлежаще идеализированном виде в основу логической трактовки предмета. Но для решения вопроса о том, на чем же именно следует остановить свой выбор, не может существовать никакого абсолютного критерия, и царящая здесь свобода ограничивается только тем единственным требованием, чтобы система аксиом действительно достигала своей цели, т. е. гарантировала беспробельное построение геометрии.

Другое замечание касается нашего отношения к аналитической геометрии и нашей критики, направленной против некоторых традиций, ведущих начало от Евклида, которые давно уже не соответствуют состоянию математических наук и поэтому должны были бы быть устранены, наконец, из школьного преподавания. У Евклида геометрия благодаря своим аксиомам является строгим основанием для общей арифметики, обнимающей также и иррациональные числа. Это подчиненное положение арифметики по отношению к геометрии оставалось в силе даже еще в XIX столетии, но с тех пор наступил полный переворот.

В настоящее время как раз арифметика достигла первенства в качестве действительно основной дисциплины; и это является фактом, с которым приходилось считаться при построении научной геометрии, т. е. геометрия должна опираться на результаты, получаемые в арифметике.

В этом именно смысле следует оценивать то отношение к аналитической геометрии, какого мы придерживаемся при нашем обосновании; да и вообще мы принципиально пользовались средствами анализа, трактуя геометрические вопросы.

На этом мы закончим наши соображения, касающиеся теорий чистой геометрии; надеюсь, что они дали вам желательный обзор всей этой области, поскольку она имеет хотя бы малейшее отношение к нуждам школы. А теперь в заключение я хочу согласно моему обещанию остановиться еще немного на преподавании геометрии.

ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНАЯ ГЛАВА

О ПРЕПОДАВАНИИ ГЕОМЕТРИИ

Здесь наше изложение будет иметь существенно исторический характер еще в большей степени, чем в соответствующих разделах первого тома, так как геометрия в соответствии с ее почтенным возрастом в качестве науки имеет за собою также и в качестве предмета преподавания такую старую традицию, как ни одна из ранее рассмотренных нами дисциплин. Если в одних отношениях эта традиция представляет преимущество, то зато в других отношениях она таит в себе серьезные опасности. Действительно в настоящее время на преподавании геометрии болезненно сказывается как раз бремя традиции, в силу которой многие его части, потерявшие жизнеспособность, так прочно в нем укоренились, что с трудом поддаются удалению и даже затрудняют всячески появление новых здоровых областей.

Чтобы понять современную [1]) структуру преподавания геометрии, приходится вернуться ко времени возрождения научной деятельности, к эпохе Ренессанса в самом широком смысле слова (начиная с 1200 г.).

Естественно, что тогда исходным пунктом послужили творения древних и что, в частности, „Начала" Евклида изучались как введение в геометрию. К этому присоединялось также изучение прочих известных тогда частей геометрии древних, т. е. в первую очередь архимедова вычисления π и учения о конических сечениях Аполлония, и, наконец, интерес к построениям при помощи циркуля и линейки, восходящий к школе Платона. Выбор этого геометрического материала является, конечно, чрезвычайно

[1]) Дополнения к нижеследующему изложению, написанному еще в 1908 г., читатель найдет во втором приложении в конце книги.

односторонним: не только разработка применений, но и выработка пространственных представлений, были совершенно оттеснены на задний план, и все внимание было сосредоточено исключительно лишь на абстрактно логической стороне геометрической дедукции. Но при этом удивительно то, что не только исследователь, ученый изучал геометрию в таком направлении, но что выработался взгляд, согласно которому „Начала" Евклида являются подходящим учебником для начального преподавания! Каким бы естественным ни было для того времени такое смешение понятий (ведь кроме Евклида тогда ничего другого и не имели), но оно, конечно, не соответствовало мнению самого Евклида, так как его „Начала" произошли, что никогда не будет лишним отметить, из университетских лекций и менее всего являются учебником, предназначенным для десятилетнего ребенка. И тем не менее это недоразумение оказывало свое действие существенным образом вплоть до нашего времени, как мы еще не раз увидим.

Спросим себя прежде всего, какие именно требования следует предъявлять в настоящее время к здоровому школьному преподаванию геометрии. Всякий согласится, конечно, с тем, что здесь

1) психологические соображения должны играть существенно руководящую роль. Преподавание не может зависеть от одного лишь (учебного) материала, но должно прежде всего считаться с подлежащим обучению субъектом. Один и тот же вопрос мы будем излагать шестилетнему ребенку иначе, чем десятилетнему, а этому последнему опять-таки не так, как взрослому человеку. В частности, в применении к геометрии это означает следующее: в школе всегда должно сперва апеллировать к живому конкретному созерцанию и позволительно лишь постепенно выдвигать на первый план логические элементы; вообще единственно правильным является генетический метод, при котором ученик, не спеша, свыкается с изучаемыми вещами.

2) Что касается подбора материала, то следует стараться выбрать из всей области чистой и прикладной геометрии такие части, которые представляются соответ-

ствующими целевой установке геометрии в рамках всего преподавания, не поддаваясь при этом влиянию исторических случайностей. Никогда не бывает излишним повторять такого рода общие требования; если даже всякий склонен соглашаться с ними в теории, то на деле с ними достаточно часто не считаются.

3) Что касается общей цели преподавания, то я не могу входить здесь в рассмотрение тех более тонких нюансов, какими взаимно отличаются разные виды школ. Достаточно отметить, что эта цель в высшей степени зависит от культурного направления данной эпохи. И, конечно, не будет защитой плоского утилитаризма, если мы скажем, что цель современной школы в том, чтобы сделать широкие круги способными морально и умственно к сотрудничеству в современной культурной работе, направленной главным образом на практическую деятельность. Поэтому, в частности для преподавания математики, представляется необходимым все более и более принимать во внимание естествознание и технику.

4) Предложить какой-нибудь определенный выбор материала я, конечно, не могу; это — дело учителя-практика, который имеет богатый собственный опыт преподавания. Настоящий курс должен, как я это уже не раз подчеркивал раньше, лишь подготовить такой выбор, поскольку он дает вам в руки в виде обзора всей чистой геометрии также и в этом отношении тот материал, который поможет вам впоследствии составить свое собственное веское мнение по этому вопросу.

5) Я желал бы отметить здесь еще только одну полезную методическую точку зрения, а именно, уже неоднократно упомянутую тенденцию к слитному преподаванию планиметрии и стереометрии, цель которого — помешать одностороннему усовершенствованию в планиметрии при одновременном пренебрежении развитием трехмерной пространственной интуиции. В том же смысле надо понимать также и требование слитного преподавания (фузионирования) арифметики и геометрии: я не считаю желательным полное слияние этих областей, но они не должны быть столь

резко разграничены, как это часто теперь происходит в школе. Весь уклон этого и прошлого моего курса показывает, как, на мой взгляд, все это следует понимать.

Действительная школьная практика оказывается, с точки зрения этих мыслей и требований, во многих отношениях совершенно неудовлетворительной. Трудно, конечно, произнести один общий приговор, так как даже в пределах одной страны практика меняется от школы к школе и даже от учителя к учителю. Но все же я считаю возможным установить небольшое число в общем и целом действительно наблюдаемых черт, хотя в ответ на каждое отдельное обвинение можно, несомненно, указать на множество случаев, в которых оно совершенно неприложимо.

1. Прежде всего я полагаю, что слияние различных областей проведено в преподавании в настоящее время еще слишком слабо; в подтверждение я приведу несколько примеров, которые, быть может, связаны для вас с живыми еще воспоминаниями.

a) Проектирование и черчение пространственных фигур, имеющие, несомненно, чрезвычайно важное значение, в современном преподавании геометрии не занимают надлежащего места. Правда, внешне они включены в учебный курс, но внутренне не переплетены с ним. В связи с этим то, что называют „духом новой геометрии“, не занимает в преподавании подобающего ему положения; я имею в виду ту идею о подвижности всякой фигуры, благодаря которой удается каждый раз перейти от частного случая к пониманию общего характера геометрических образов. И хотя отдельные главы „новой геометрии“, как, например, учение о гармонических точках и трансверсалях, и вошли в программу, но то, что своеобразный метод новой геометрии позволяет схватить одним взглядом, в школе обыкновенно излагают по застывшей евклидовой схеме, расчленяя на множество частных случаев.

b) Геометрию и арифметику в школе обыкновенно искусственно отделяют одну от другой; поучительный пример этого представляет уже упомянутый выше (стр. 318) способ прохождения теории пропорций, которые прорабатывают сперва арифметически, а затем — часто даже без всякой связи с предыдущей проработкой — в геометрической форме.

c) Аналитическая геометрия с ее основным положением, что функция $y=f(x)$ изображает кривую, несомненно доступна пониманию детей уже на ранней ступени, и она могла бы и должна бы пронизывать в дальнейшем все преподавание геометрии. Вместо этого ее надстраивают в виде нового отдельного здания над готовым зданием геометрии и после того, как уже однажды проработали „синтетически" (в духе древних!) конические сечения, показывают, как можно все получить гораздо проще при помощи „новой дисциплины" — аналитической геометрии. При этом, конечно, не учитывается и то более глубокое воззрение современного исторического исследования, согласно которому идея аналитической геометрии по существу имелись уже у Аполлония.

2. Теперь я хотел бы бросить взгляд на то, какие научные последствия имело это сохранение в преподавании исторически сложившейся изолированности отдельных областей. Конечно, элементарная геометрия, даже в ее вызывающей мои нарекания изолированности, во многих случаях дает повод к постановке научных проблем.

Относительно литературы укажу, с одной стороны, на реферат Макса Симона „О развитии элементарной геометрии в XIX столетии"[1]), а с другой, — наряду с моей книжечкой „Лекции по избранным вопросам элементарной геометрии"[2]), — на интересный итальянский сборник Энриквеса „Вопросы, относящиеся к элементарной геометрии"[3]),

---

[1]) Max Simon, Über die Entwicklung der Elementargeometrie im 19. Jahrhundert, Jahresbericht der deutschen Mathematikervereinigung, Ergänzungsband I, Leipzig 1906.

[2]) F. Klein, Vorträge über ausgewählte Fragen der Elementargeometrie, ausgearbeitet von F. Tägert, Leipzig 1895.

[Существует русский перевод, Казань 1898, издание физ.-мат. о-ва].

[3]) F. Enriques, *Questioni riguardanti la geometria elementare*, Bologna 1900, 3 ediz. 1924. [Начиная со второго издания, этот сборник называется „Questioni riguardanti le matematiche elementari", охватывая наряду с геометрией также принципиальные вопросы теории чисел, теоретической арифметики, алгебры и анализа.]

существующий также в немецкой обработке [1]) в двух томах; наконец, следует еще отметить „Теорию геометрических построений“ Адлера (A. Adler) [2]).

Я не могу, к сожалению, останавливаться здесь на положительной стороне возникающих при этом интересных проблем и должен, наоборот, ограничиться подчеркиванием некоторых нелепостей, возникших в результате изолированного положения элементарной геометрии вдали от общего развития математики. Оказывается, что некоторые вопросы, представляющие с высшей точки зрения лишь весьма незначительный интерес, получили очень широкое развитие и тоже вошли в школьное преподавание.

a) В этом отношении я должен прежде всего упомянуть о дисциплине, носящей в школе название алгебраической геометрии (в России ее чаще называли приложением алгебры к геометрии), которая учит сперва вычислять элементы треугольника или других фигур, а потом уже строить их каждый в отдельности. Чтобы получить мерило ценности этой области, спросите себя, приходилось ли вам когда-либо пользоваться ею в высшей школе или могли ли бы вы там ею воспользоваться? Наверное нет; мы имеем здесь дело с боковой веточкой, которую искусственно культивировали ради нее самой и которая никогда не вступала в живой контакт с другими ветвями науки.

b) Пользуется славой также область, посвященная построению треугольников (отдел так называемых „задач на построение“). Весьма хорошо и полезно, если вообще занимаются построением фигур, и я сам, конечно, всегда рекомендую пользоваться во всех областях графическими методами. Как раз здесь, в Геттингене, на лекциях о графических методах профессора Рунге (Runge) вы

---

[1]) „Fragen der Elementargeometrie“, Bd. 1: Prinzipien der Geometrie, deutsch von H. Thieme, Leipzig 1911 (2. Aufl. 1923); Bd. II: Die geometrischen Aufgaben, ihre Lösung und Lösbarkeit, deutsch von H. Fleischer, Leipzig 1907 (2. Aufl. 1923).

[Русский перевод Яшунского, СПБ 1913, „Вопросы элементарной геометрии“.]

[2]) „Theorie der geometrischen Konstruktionen“, Sammlung Schubert, 52. Leipzig 1905. [Русский перевод в изд. „Матезис“, Одесса 1910; 2-е изд. Одесса 1924.]

имеете наилучшую возможность познакомиться с многочисленными, развитыми в последнее время, крайне остроумными приемами[1]. Но такими важными и интересными вещами в школе не занимаются; там ограничиваются почти исключительно построением треугольников и притом лишь задачами, разрешимыми при помощи циркуля и линейки. Как известно, можно получить множество разнообразнейших задач этого рода, частью очень трудных, если выбирать три данных элемента треугольника самым различным и к тому же, как удачно было сказано, „возможно более нецелесообразным образом".

При этом действительному выполнению найденных построений часто не придают никакого значения, и они фактически оказываются в большинстве случаев слишком сложными для практики по причине искусственного ограничения в средствах (инструментах). Конечно, с такими построениями связаны также теоретически очень интересные и глубокие вопросы, каковы вопросы, трактуемые в названном сочинении Энриквеса или некоторые примеры, рассмотренные нами в первом томе этой книги [2]: я имею в виду алгебраические доказательства невозможности, которые показывают, почему при некоторых построениях (например, при построении правильного семиугольника или при делении любого угла на три части) как раз невозможно обойтись только циркулем и линейкой. Но в школе об этом часто не говорится даже в форме намека, и таким образом у многих людей все снова и снова создается убеждение в разрешимости всякой геометрической задачи помощью циркуля и линейки. В этом, я думаю, надо искать объяснение того, что никогда не вымирает толпа тех искателей квадратуры круга и трисекции угла, о которых я уже говорил вам в прошлом семестре.

---

[1] Ср., например, C. Runge, Graphische Methoden, 2. Aufl., Leipzig 1919 (*Sammlung mathematisch-physikalischer Lehrbücher*, 18) и H. v. Sanden, Praktische Analysis, Leipzig 1914 („Handbuch der angewandten Mathematik"). [Обе книги переведены на русский: Рунге, Графические методы математических вычислений, перев. с 3-го нем. изд. В М. Абрамова, изд. ГТТИ, 1932 и Занден, Элементы прикладного анализа, перев. со 2-го нем. изд. В М. Брадис и др., изд. ГТТИ, 1932.]

[2] См. т. I, стр. 78 (79) и сл. (семиугольник), стр. 172 (186) и сл. (трисекция).

c) Наконец, я должен еще упомянуть о так называемой **геометрии треугольника**, т. е. об учении о „замечательных" точках и прямых в треугольнике, которое получило совершенно особое развитие в качестве самостоятельной дисциплины **в недрах школьной** математики. И в этом случае вы должны будете согласиться со мною в том, что эта область настолько же отступает на задний план при дальнейшем изучении математики, насколько она обыкновенно выдвигается вперед в школьном преподавании. Выше было уже объяснено, в каком уголке проективной геометрии имеется место для этой геометрии треугольника (ср. стр. 261 и сл.): речь идет о теории инвариантов тех плоских фигур, которые состоят из трех произвольных точек и из обеих мнимых циклических точек их плоскости, следовательно, действительно о чем-то совершенно специальном.

Если мы желаем кроме этих критических замечаний общего характера рассмотреть детально современные формы преподавания геометрии, то нам придется изучить порознь его развитие в разных странах, так как оно сложилось, конечно, в них совершенно различным образом; при этом мы вынуждены, разумеется, ограничиться здесь лишь важнейшими культурными странами, хотя бы Англией, Францией, Италией и Германией.

1. ПРЕПОДАВАНИЕ В АНГЛИИ

В Англии дольше всего преподавание геометрии находилось во власти средневековой евклидовой традиции, которая там отчасти чувствуется еще и по сей день. Такое положение вещей обусловливается организационными формами **английских экзаменов**. Прекрасный принцип, согласно которому учиться следует независимо от экзаменов, как и многие другие прекрасные принципы, к сожалению, нигде не проводится в жизнь. В Англии, к тому же, господствует замечательная **система строго централизованного экзамена наряду с совершенно независимой частной (приватной) организацией отдельных школ**. У нас же как раз наоборот: у нас в каждой отдельной школе ученика экзаменуют учителя, хорошо его знающие, причем в значительной степени должна учитываться индивидуальность ученика. Но зато мы имеем единообразные учебные планы, которые содержат определенные общие директивы относительно материала и методов преподавания во всех школах. В противоположность этому в Англии отдельные школы являются частными учреждениями, которые пользуются почти неограниченной свободой действий и по всей своей организации бывают самого различного типа. Но экзаменовать своих учеников они не имеют права. Установлено как принцип, что экзаменатор не знает и даже не видит экзаменующегося и совершенно схематически проверяет и оценивает только письменную работу ученика и что исключительно от результата этой проверки зависит исход экзамена. В Лондоне, Кембридже и в Оксфорде находятся большие экзаменационные комиссии, в которых подвергаются испытанию абитуриенты со всей страны.

Так, например, в Лондоне, как сообщил мне один из главных экзаменаторов, ежегодно держат экзамены 24 000 учеников, и все они получают одни и те же задачи, одни и те же вопросы. Для просмотра этих задач экзаменатор имеет 30 ассистентов, каждый из которых должен, следовательно, исправить 800 раз одну и ту же работу. Никто бы, конечно, не взялся за такую работу, если бы она не оплачивалось очень хорошо.

В преподавании математики такой своеобразный метод возможен лишь в том случае, если имеется один стандартный (нормальный) учебник („standart-work“), известный каждому экзаменующемуся и служащий для экзаменатора основою для его вопросов. Роль такого нормального руководства в Англии с давних пор исполняют по отношению к геометрии „Начала“ Евклида. Понятно, что при такой системе один и тот же учебник и один и тот же метод преподавания должны были сохраняться столь долгое время без существенных изменений и что вообще при ней всякая реформа сопряжена с величайшими трудностями. Ведь экзаменационное начальство не может само по себе реорганизовать характер преподавания во всей стране. Так как оно не имеет на него никакого официального влияния, а с другой стороны, экзаменаторы едва ли могут при массовом характере экзаменов учесть индивидуальные особенности каждой отдельной школы, которая пожелала бы испробовать самостоятельно новые методы преподавания.

Посмотрим теперь, что представляет собою подобный английский школьный Евклид. Здесь передо мной издание Потса (R. Potts)[1]), которое в последние десятилетия пользовалось особенным распространением. Оно содержит, что очень характерно, только книги 1—6 (планиметрию), а также книги 11 и 12 (начала стереометрии и метод истощения), и все это в дословном переводе. К этому материалу добавлены объяснительные и отчасти исторические примечания, а также задачи. Отсутствуют, следовательно, из книг, составляющих „Начала" Евклида, арифметические книги (7—9), классификация иррациональностей (книга 10) и правильные тела (книга 13). Имеющийся материал по традиции заучивается в английских школах более или менее наизусть с тем, чтобы на экзамене каждый имел его наготове в голове. Чтобы охарактеризовать этот метод, Перри (Perry) сделал однажды такое забавное замечание: „Какой здоровой должна быть английская натура, если она оказалась в состоянии в течение веков выносить столь неподходящий метод обучения". Конечно, чувствовалась необходимость принять во внимание также и результаты современного, далеко опередившего Евклида исследования. Но этого думали достичь тем, что их насильно втискивали в неподвижную евклидову форму, причем, естественно, утрачивался в значительной степени самый дух новой науки. В качестве примера возникших таким образом так называемых „продолжений Евклида" („sequels to Euclid") я предлагаю здесь книгу Кэзи (J. Casy)[2]), трактующую в таком именно виде начатки проективной геометрии.

Естественно, что в конце концов возникла реакция против этой застывшей системы. Начало ей положил в 1869 г. великий английский математик Сильвестр (Sylvester), а в 1874 г. была основана „Ассоциация для улучшения преподавания геометрии" (Association for the improvement of geometrical teaching"). После долгих работ это общество издало, наконец, новый нор-

[1]) „Euclid, elements of geometry", London 1869.

[2]) „A sequel to the first 6 books of the elements of Euclid, containing an easy introduction to modern geometry", Dublin 1900.

мальный учебник „Элементы плоской геометрии“ [1]). По существу это просто несколько выравненная и сглаженная обработка первых шести книг „Начал“ Евклида. Так, например, там устранены те шероховатости в начале первой книги, на которые мы жаловались, именно тем, что последовательно выдвигается на первое место понятие движения. Но в общем соблюдены как порядок, так и выбор материала по Евклиду, опять-таки учитывая экзаменационные требования. Таким образом получилась довольно-таки скромная попытка реформы, и тем не менее она встретила резкое противодействие со стороны приверженцев старой евклидовой системы. В виде иллюстрации предлагаю вашему вниманию во всяком случае довольно забавно написанную книжку Додгсона (Dodgson): „Евклид и его современные соперники“ [2]). Здесь автор затевает с Ассоциацией судебную тяжбу в буквальном смысле слова: он выводит на сцену не более и не менее как адского судью Миноса, перед которым выступают с защитительными рычагами Евклид и его современные соперники, т. е. составители новейших учебников, с Лежандром (Legendre) на первом месте. Но одному только Евклиду удается при этом ловко парировать удары, тогда как все прочие, и в особенности улучшатели Евклида из ассоциации, скоро исчерпывают все свои аргументы.

Я не могу вдаваться здесь в детали и хотел бы только отметить одно обстоятельство, имеющее более общее значение и встречающееся также и в литературе других стран. А именно, очень многие из тех, кто пишет по вопросам преподавания, знакомы почти исключительно со школьной литературой своей собственной страны и не имеют никакого понятия ни о параллельных стремлениях в других странах, ни об успехах чистой науки в соответственных областях, т. е. в данном случае по основам геометрии. Это отлично видно у Додгсона, который упоминает исключительно, если не считать Лежандра, стоящего у него особняком, только английских авторов учебной литературы и совершенно не принимает во

---

[1]) P. 1. 2. London 1884, 1888.

[2]) „Euclid and his modern rivals“, 2-е изд. London 1885.

внимание успехов научных исследований по вопросам обоснования геометрии. Такое явление приходится часто наблюдать; сравнительные обзоры преподавания у различных наций, подобные тому, какой мы здесь даем, распространены еще далеко недостаточно.

Несравненно бо́льший успех, чем описанное движение Ассоциации, имело другое движение в пользу реформы, носившее, можно сказать, прямо-таки революционный характер и связанное с именем Перри. Джон Перри (Jhon Perry) был инженером и преподавал в одном из самых больших технических институтов в Лондоне. Он положил начало мощному движению, которое самым энергичным образом восстало против односторонней логической тренировки путем изучения Евклида и желало заменить ее преподаванием, базирующимся исключительно на наглядных представлениях, которые должны прежде всего привести учащегося к полному овладению математической техникой (mathematische Exekutive). Перри известен больше всего как составитель учебников, имеющих целью помочь инженерным кругам практически овладеть исчислением бесконечно малых. Здесь следует назвать в особенности его „Calculus for engineers" („Исчисление для инженеров") (London, 3 rd ed., 1899), переведенное на немецкий язык Фрике и Зюхтингом под названием „Высший анализ для инженеров" [1]. Наряду с этим следует упомянуть также характерную для тенденций Перри небольшую книжку „Practical mathematics (London 1899) [2], которая составилась из лекций для рабочей аудитории и пытается в очень искусной и увлекательной форме сделать доступными для широкой публики идеи системы координат, функции и т. д., постоянно пользуясь практическими примерами.

Все это, собственно, не есть геометрия, но под влиянием Перри была сделана попытка реформировать преподавание также и в этой области путем введения так

---

[1]) R. Fricke und F. Süchting, Höhere Analysis für Ingenieure, Leipzig 1902; 4. Aufl., 1923. [Существует русский перевод: Дж. Перри, Курс высшей математики для инженеров, перевели Акулов и Башинский, изд. Гольстена, СПБ 1904.]

[2]) [Тоже существует русский перевод (Лермантова) под название „Практическая математика"].

называемого лабораторного метода. При этом методе начинают с того, что изучают вещи в их практическом применении), например чертят и измеряют кривые на миллиметровой бумаге, учатся пользоваться планиметром и т. д. О логических выводах и доказательствах не говорится вовсе или, во всяком случае, их отодвигают на самый задний план. В центре внимания стоит только практическое уменье. Мы имеем здесь перед собой, собственно говоря, наибольшую противоположность, какую только можно представить себе, методу Евклида. Эти устремления полностью отразились в учебнике Гаррисона „Пракическая геометрия на плоскости и в пространстве для учащихся в начальных школах“ [1]), который действительно начинается с описания всего того, что требуется для черчения: чертежная бумага, чертежная доска, игла для отметки точек, карандаш и т. д. Затем даются практические указания, относящиеся к черчению; говорится о том, как проверяют прямолинейность линейки, правильность прямого угла, и таким образом, так сказать, чисто эмпирическим путем развивается учение о простейших плоских пространственных образах, постоянно предпосылая действительное выполнение чертежей и опираясь на живую интуицию. Несколько дальше этой совершенно элементарной книжки идет „Практическая геометрия на плоскости и в пространстве для учащихся старших классов, включая графическую статику“ Гаррисона и Баксандаля [2]), которая таким же эмпирическим методом доводит вплоть до начертательной геометрии и до методов графических расчетов. Указания на дальнейшую литературу вы найдете в очень интересном отчете Роберта Фрикке „О стремлениях к реорганизации начального преподавания математики в Англии [3]), в котором подробно описывается движение Перри. Очень интересны также сообщения о тех

[1]) Harrison, Practical plane and solid geometry for elementary students, London 1903.

[2]) Harrison and Baxandall, Practical plane and solid geometry for advanced students including graphic statics, London 1903.

[3]) Robert Fricke, Über Reorganisationsbestrebungen des mathematischen Elementarunterrichts in England (Jahresbericht der deutschen Mathematiker-Vereinigung, Bd. 13, стр. 283 и сл. 1904.

дискуссиях, которые вызвал Перри на съездах британской ассоциации — английского учреждения, подобного нашему немецкому „Naturforscherversammlung" (Съезды естествоиспытателей) — в Глазго и в Иоганнесбурге (1901 и 1905), и которыми он достиг широкого воздействия на преподавание в Англии[1]).

Я считаю эти тенденции Перри несомненно очень подходящими для начальных школ второй ступени (Fortbildungsschulen) и для низших и средних профессиональных школ, которые должны готовить практически квалифицированных ремесленников и младших техников. Но для средних школ исключительное подчеркивание практических моментов, свойственное движению Перри, представляется мне недостаточным, хотя оно несомненно дает ряд весьма ценных импульсов. Мы не считаем возможным совершенно отказываться от выработки логического мышления в процессе обучения математики и нам представляется желательным скорее нечто среднее между обеими возможными крайностями с тем, чтобы наряду с интуитивным построением геометрии, исходящим из практического опыта, логические доказательства тоже не оставались в загоне.

К такому компромиссу, повидимому, действительно приближаются под давлением движения Перри экзаменационные власти в Оксфорде и Кембридже, как это видно из новых экзаменационных правил[2]). В соответствии с ними написан новый учебник Годфрея и Сиддонса „Практическая и теоретическая элементарная геометрия"[3]) (1904), который по сравнению с „Началами" Ассоциации является значительным шагом вперед. Начинается учебник с введения, основывающегося на интуиции („experimental geometry"), для первой ступени представляющего собой геометрическую пропе-

---

[1]) Perry, Discussion on the teaching of mathematics, London 1902. Discussion at Johannesburg on the teaching of elementary mechanics, London 1906.

[2]) Ср., например, „Regulations of the Oxford and Cambridge Schools Examination board for the year 1904", где на стр. 37 имеются специальные разделы, относящиеся к „Practical Geometry".

[3]) Godfrey and Siddons, Elementary geometry practical and theoretical, Cambridge 1904.

девтику, подобную той, какая у нас применяется всюду уже с давних пор, но которой в Англии раньше почти не знали. Затем идет логическое построение геометрии, которое по материалу и по форме, конечно, то же сильно напоминает Евклида, но в подходящих случаях проникнуто также и новыми идеями; например, понятие о площади фигуры впервые выводится так, что фигуру вычерчивают на миллиметровке и считают число охватываемых ею квадратиков. Эта книга, свидетельствующая о начавшемся, наконец, медленном модернизировании английского преподавания, сразу же получила невероятное распространение, как и вообще на английском книжном рынке при гигантском спросе английской колониальной империи приходится иметь дело с совершенно другими цифрами, чем у нас в Германии.

Общему консервативному характеру английского школьного дела не противоречит то, что отдельные авторы развивают крайне свободные и интересные взгляды на преподавание, не желая и не имея возможности вместе с тем ввести непосредственно в жизнь какое-либо изменение организационного характера. В качестве примера я назову книгу Бранфорда „Этюд о математическом воспитании, включая обучение арифметики" (1908)[1]. Она содержит очень интересные исследования по вопросу о психологических условиях преподавания и с особенным вниманием относится к параллелизму, имеющему место между историей развития ребенка и историей человеческого рода; при этом математическое понимание ребенка, к которому должно обращаться первоначальное обучение, ставится в параллель с математикой диких племен.

Наряду с этим я назову еще книжку Юнгов, „Первая книжка по геометрии"[2]), изданную по-немецки

---

[1]) Brandford, A study of mathematical education including the teaching of arithmetic. Oxford 1908.

(Немецкий перевод R. Schimmak und H. Weinreich, Leipzig 1913.)

[2]) C. and W. H. Young, The first book of geometry, London 1905. [Имеется перевод Грация, Ч. Юнг и У. Г. Юнг „Первая книжка по геометрии", Москва 1911.]

Бернштейнам и под названием „Маленький геометр“ [1]). Эта книга претендует на указание нового, оригинального пути развития геометрического понимания у ребенка, и притом вводя его сразу же в область трехмерного пространственного созерцания. Руководящая идея заключается в том, что природная пространственная интуиция должна поневоле захиреть, если с самого начала приучать ребенка чертить исключительно на двумерной бумаге и тем искусственно ограничивать плоскостью его наглядные представления. Поэтому с самого начала применяется интересный прием складывания бумаги, пользуясь которым можно образовать при помощи булавок всевозможные пространственные и плоские фигуры. Получаются в высшей степени наглядные и тем не менее в то же время логически удовлетворительные доказательства, например для пифагоровой теоремы; вообще при этом возникает новый интересный способ построения геометрии, заслуживающий полного внимания и при более серьезных занятиях.

Оставим на этом положение дел в Англии и обратимся к Франции.

II. ПРЕПОДАВАНИЕ ВО ФРАНЦИИ

Постановка преподавания во Франции представляет для нас тем больший интерес, что она оказывала многообразное влияние также и на преподавание в Германии. Здесь мы видим картину, принципиально отличную от той, какую мы видели в Англии. В то время как англичане строго консервативно держатся за старые учреждения, француз любит новое и часто даже вводит его не путем постепенного преобразования старого, а в форме внезапной реформы, которая скорее даже является революцией. Организация преподавания здесь тоже совершенно другая: во Франции мы имеем дело не только с централизацией экзамена в форме приемных испытаний при поступлении в высшие школы, особенно парижские, но и вообще со строго централизованной организацией всего преподавания.

---

[1]) S. und F. Bernstein, Der kleine Geometer, Leipzig und Berlin 1908.

Высшая власть — так называемый „Совет по делам высшего образования“ („Conseil d'instruction supérieure“), в состав которого, кстати, всегда входили также первоклассные ученые математики, — является полным хозяином и имеет возможность предписывать по своему усмотрению и как угодно часто самые радикальные реформы и изменения. Такие реформы должны в таких случаях сразу же быть проведены во всей стране, и уже дело учителей суметь к ним приспособиться. С индивидуальной свободой отдельного учителя, к которой мы в Германии привыкли в высокой степени, во Франции считаются гораздо меньше. Здесь было бы вполне правильным употребить выражение: „система революции сверху“.

Что касается специального преподавания геометрии, то его модернизация, т. е. освобождение от строгого следования Евклиду, началась во Франции уже очень рано, примерно около 1550 г. Она была только одним из проявлений разыгравшейся в то время великой борьбы нового гуманизма против старой схоластики. Как раз тогда Петр Рамус (Petrus Ramus), занимавший выдающееся положение среди представителей новых идей не только в математике, но и в других областях, написал учебник математики („Arithmeticae libri 2, geometricae libri 27“) [1].

В нем уже совершенно покинуты как форма, так и материал Евклида; в противоположность последнему для Рамуса, как он сам говорит для характеристики своего учебника в начале первой книги, „геометрия является искусством хорошо измерять“ („ars bene metiendi“). Сообразно с этим практические интересы всюду стоят у него на первом месте. Он начинает с объяснения того, как надо производить простые геодезические измерения, описывает инструменты и поясняет все это на многочисленных интересных рисунках. И лишь на втором месте даются у него также и логические дедукции, но ни в коем случае не как самоцель, а только лишь как средство для вывода новых геометрических теорем, которых нельзя получить непосредственно из наблюдения, но которые тем не менее полезны для приложений; при этом, конечно,

[1]) Basel 1580.

оттеснение дедукции у Рамуса не заходит настолько далеко, как у Перри.

Такая трактовка геометрии практиковалась во Франции очень долго. Приблизительно через 200 лет после Рамуса появились знаменитые „Элементы геометрии“ Клеро [1]).

Это тот самый Клеро, который известен как выдающийся исследователь; вообще по отношению к Франции в противоположность Германии и Англии можно сделать то наблюдение, что выдающиеся математики из высшей школы всегда с интересом принимают участие в работах по вопросам преподавания. Сочинение Клеро выделяется своим прекрасным стилем. Вообще французы в высокой степени владеют искусством плавного, удобочитаемого изложения даже трудных отвлеченных вещей, которое представляет самую резкую противоположность однообразной „евклидовой“ манере изложения с ее шаблонной расчлененностью. Такие книги читаются, „как роман“, и тем опровергают самым решительным образом старый взгляд, будто хорошие научные книги обязательно должны быть написаны скучно. Что же касается содержания, то и Клеро исходит исключительно из практических проблем землемерия и затем весьма постепенно вводит читателя в круг общих идей, причем строго логический момент несколько стушевывается. В своем очень интересном предисловии Клеро объясняет, почему он выбирает такой порядок изложения: люди вообще получили стимул к созданию геометрической науки как раз от практических задач землемерия, поэтому и теперь еще легче заинтересовать всякого геометрией, если начинать с этих задач, а не с абстрактного построения, состоящего из аксиом и теорем, внутренний смысл которого никто не в состоянии так быстро схватить. Клеро следует здесь, очевидно, тенденции сделать свой труд доступным также и для более широких кругов, а не только для специалистов, отвечавшей тому факту, что тогда математика считалась необходимой частью общего образования правящих слоев общества в несравнимо большей степени, чем в настоящее время.

---

[1]) Clairaut, Eléments de géométrie, 1741; Nouvelle édition, Paris 1830.

Новая эпоха в постановке преподавания наступила в конце столетия в результате великих переворотов, вызванных французской революцией 1789 г.

Если до этого времени речь всегда шла, главным образом, лишь об образовании высших сословий, в частности о подготовке к военной карьере, то топерь на первый план выступают новые социальные слои буржуазии, и перед преподаванием ставятся новые цели, и в него вводятся новые методы. Здесь я должен выделить два направления в эволюции преподавания геометрии, связанные с двумя высшими школами, основанными тогда в Париже, — с „Политехнической школой" („Ecole Polytechnique") и с „Высшей нормальной школой" („Ecole Normale Supérieure"). Первая из них, отвечая потребностям получившей тогда новый подъем техники, должна была готовить гражданских и военных инженеров, а вторая — учителей для старших классов. В Политехнической школе наибольшим влиянием пользовался знаменитый Монж (Monge). Он создал там ту постановку преподавания геометрии, которая еще и теперь существует в высших технических школах и подобных им институтах; сюда относятся прежде всего обширные курсы начертательной и аналитической геометрии. Существенным новшеством по сравнению с прежней постановкой преподавания является то, что теперь преуспевают не только немногие особенно интересующиеся слушатели, но благодаря целесообразной организации большое число студентов одновременно плодотворно выполняют каждый свою работу. На современников Монжа произвело особенно сильное впечатление, когда он в первый раз вел практические занятия, при которых до 70 человек одновременно работало над своими чертежными досками.

А в Нормальной школе в это время работал Лежандр оказавший своими знаменитыми „Началами геометрии" („Elements de gèomètrie"), впервые появившимися в 1794 г., на долгое время решающее влияние на преподавание геометрии; я могу показать вам 4-е издание этой книги [1]).

[1]) Paris 1802.

Эта книга приобрела наибольшее, после „Начал" Евклида, распространение из всех учебников элементарной геометрии, причем замечательно то, что, как я уже указывал, это относится не только к Франции, где ее переиздавали снова и снова в течение всего XIX столетия, но и к другим странам. В частности, в Америке и Италии она долгое время занимала главное положение.

По сравнению с Клеро или, тем более, с Рамусом книга Лежандра означает большой шаг назад к Евклиду. Ее главной целью снова является установление замкнутой абстрактной системы элементарной геометрии. Но, с другой стороны, имеются и существенные отличия по сравнению с Евклидом, которые я теперь изложу более подробным образом, имея в виду великое историческое значение Лежандра.

1) Что касается стиля изложения, то у Лежандра мы имеем связный, удобочитаемый текст; по своей внешней форме он гораздо ближе к изложению Клеро, которое я выше восхвалял, чем к манере писания Евклида, расчлененной, я готов почти сказать — изрубленной, и утомительной своим однообразием.

2) Относительно содержания самым существенным является то, что Лежандр в противоположность Евклиду сознательно пользуется в геометрии элементарной арифметикой своего времени; таким образом он является сторонником — употребим это слово — слияния (Fusion) арифметики и геометрии и даже охватывает в этом слиянии также и тригонометрию, которую он тоже излагает в своей книге.

3) Принципиальная установка Лежандра сравнительно с евклидовой несколько смещена от логической стороны к интуитивной. Евклид — как я уже достаточно часто отмечал — все свое внимание направляет на систему логических выводов, которую он стремится, во всяком случае, сохранить свободною от примеси интуитивных элементов; все факты интуиции, какие он считает нужным использовать, он предпосылает собранными в виде своих аксиом и т. д. В противоположность этому Лежандр не боится употреблять при случае интуитивные соображения также и в процессе дедуктивного доказательства геометрической теоремы.

4) Для большей конкретности представляется особенно интересным сопоставить трактовку иррациональных чисел у обоих авторов. В 5-ой книге Евклида содержится, как мы знаем, подробное определение и исследование понятия иррационального числа в форме logos'a или отношения двух несоизмеримых величин, в полной аналогии с современной теорией иррационального числа. В дальнейшем своем изложении Евклид всегда особенно тщательно проводит доказательства тех теорем, в которые по самой природе вопроса входят иррациональные числа, со строгостью, удовлетворяющей даже теперешним нашим требованиям (доказательства по методу исчерпывания!). Лежандр же бегло скользит мимо всех этих пунктов. Числа, как рациональные, так и иррациональные, он считает известными из арифметики, в которой тогда тоже не слишком много ломали себе голову над их строгим обоснованием. Доказательств по методу исчерпывания и подобных вещей он не знает; ему представляется совершенно очевидным, без всяких пояснений, что предложение, справедливое для всех рациональных чисел, справедливо также и в случае чисел иррациональных. Впрочем, и в этом отношении Лежандр сходится со всеми другими великими математиками своего времени. В прошлом семестре я как раз приводил вам пример такой точки зрения из „Теории аналитических функций" Лагранжа [1]).

5) Несмотря на такое вольное обращение с логической строгостью в деталях, Лежандр никоим образом не относится равнодушно к принципиальным вопросам об основаниях геометрии; в этом смысле он в противоположность своим предшественникам во Франции не только воспринимает с полным интересом евклидову традицию, но даже развивает ее дальше, вводя существенно новые идеи.

Особенное внимание он уделяет теории параллелей, и на этом я остановлюсь несколько подробнее. Здесь я имею в виду первые издания книги Лежандра, так как в позднейших обработках как раз в этом отношении внесены большие изменения.

---

[1]) Ср. т. I, стр. 230 [241] [доказательство теоремы о биноме].

Исхожу из такого замечания: мы охарактеризовали выше евклидову и обе неевклидовы геометрии тем, что число прямых, проходящих через данную точку параллельно данной прямой, равно единице, либо нулю, либо двум. Но вместо этого можно также рассматривать **сумму углов любого прямолинейного треугольника**, что дает такое, как можно доказать, вполне равносильное предыдущему различение: **В случае евклидовой геометрии эта сумма равна π, в неевклидовой геометрии первого рода (гиперболической) она всегда меньше π и в геометрии второго рода (эллиптической) она постоянно бывает больше π.** И вот Лежандр желает доказать, что обе последние возможности исключаются. Но доказать это — все равно, что доказать евклидову аксиому о параллелях; поэтому Лежандр может достичь своей цели только заимствуя у интуиции некоторые простые принципы, неявно включающие аксиому параллелей, и все его искусство сводится к выбору в качестве этих принципов настолько правдоподобных положений, что ни читатель, ни даже, несомненно, сам автор не замечают того, что речь идет фактически о новых ограничительных предположениях (постулатах).

Что касается прежде всего невозможности **эллиптической геометрии**, т. е. того, чтобы сумма углов была больше π, то в основе весьма примечательного доказательства Лежандра лежит молчаливое **допущение** того, что **длина прямой бесконечна**. Конечно, это — крайне правдоподобное допущение, и в его справедливости не сомневались ни Лежандр, ни кто-либо из его читателей, да и все последующие геометры, предшествовавшие Риману, считали его самоочевидным. И все же эллиптическая геометрия показывает, что со всеми прочими аксиомами совместимо также допущение **конечной** длины у прямой, если только принять, что она **неограниченна** и, следовательно, сама собой замыкается. Необходимо поэтому отдавать себе ясный отчет в том, что вместе с бесконечной длиной прямой вводится новый, решающего значения факт интуиции.

Чтобы таким же образом исключить возможность **гиперболической геометрии**, Лежандр снова пользуется, не оговаривая этого особо, одним простым интуитивным фактором, в котором никогда не усомнится ничей рассудок, еще, так сказать, не испорченный занятиями геометрией: если P представляет какую-либо точку внутри угла двух полупрямых α, β, то всегда возможно провести через P прямую, которая пересекала бы как α, так и β (рис. 142). При помощи этого предположения Лежандру удается доказать безупречным образом, что сумма углов в тре-

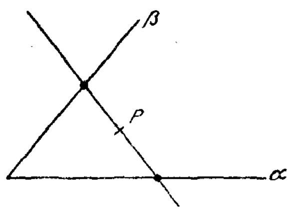

Рис. 142.

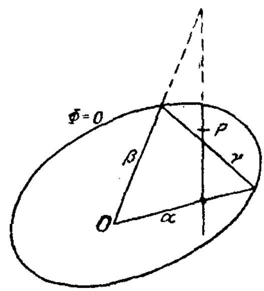

Рис. 143.

угольнике никогда не может быть также и меньше π так что остается в конце концов возможной одна только евклидова геометрия.

Теперь я должен выяснить, почему этот столь тривиальный факт не имеет места в неевклидовой геометрии первого рода; тогда только мы сможем вполне понять, почему Лежандру удается, пользуясь этим фактом, исключить названную геометрию. Будем исходить в точности из нашего прежнего изложения.

Пусть α, β — два луча гиперболической геометрии, исходящие из точки O, которая, конечно, должна лежать где-нибудь внутри основного конического сечения $\Phi = 0$ (рис. 143). Тогда всеми *параллелями* по отношению к α являются лучи, проходящие через точку пересечения луча α с этим коническим сечением (т. е. через бесконечно удаленную точку луча α), поскольку они проходят внутри последнего; подобным же образом обстоит с параллелями к β. Поэтому существует прямая γ, параллельная как по отношению к лучу α, так и к β, а именно прямая, соединяющая точки пересечения α и β с коническим сечением $\Phi=0$. В евклидовой геометрии это, конечно, не может иметь места. Если теперь взять точку P между α и β, но вне треугольника, ограниченного прямыми α, β, γ (и внутри нашего конического сечения), то для нее лежандрово допущение не имеет более места: ведь всякая прямая, проходящая черезь P пересечет только один из лучей α, β внутри конического сечения, а другой луч она встретит вне последнего, т. е. в смысле нашей геометрии вовсе его не встретит. Но это как раз я и хотел здесь показать.

Оставим после этого отступления Лежандра и посмотрим, какими путями пошло после него дальнейшее развитие преподавания геометрии во Франции. Замечательно то, что организация школьного дела во Франции в течение XIX столетия изменилась очень мало. Как и вообще во всех культурных областях учреждения, созданные при Наполеоне I, сохранялись без изменений в течение долгого времени среди всех смен политического режима, так и в преподавании геометрии все еще почти неограниченно господствует Лежандр, если не считать того, что в постоянно возобновляемых новых изданиях [1]) происходит известная фильтрация содержания в сторону ограничения прикладных моментов, имевшихся еще у Лежандра. А именно, если даже у самого Лежандра искусство геометрического измерения и не занимает такого выдающегося положения, как у Клеро или тем более у Петра Рамуса, то он не обнаруживает и того пренебрежительного отношения к этому искусству, какое стало обычным впоследствии; в то же время Лежандр проявляет очень живой интерес к технике решения математических задач, к числовым выкладкам. Но все относящееся сюда все в большей и большей степени опускалось в позднейших изданиях; в частности, совершенно выпала глава, посвященная тригонометрии, которую Лежанрд особенно тесно увязывал с упомянутыми приложениями. В качестве характерного примера можно назвать так называемую лежандровую теорему из сферической три-

---

[1]) Здесь у меня в руках 33-е издание в обработке Бланше (A. Blanchet), вышедшее в 1893 г.

гонометрии. Если имеется на поверхности шара сферический треугольник со сторонами a, b, c и с углами α, β, γ (рис. 144) то так называемый **сферический избыток** $\alpha+\beta+\gamma-\pi=E$, как известно, имеет всегда положительную величину. Если стороны не слишком велики по сравнению с радиусом шара, не превосходя, например, на земной поверхности 100 *км*, то **можно с достаточной для всех практических целей точностью заменить сферический треугольник плоским треугольником с углами** $\alpha-\frac{E}{3}$, $\beta-\frac{E}{3}$, $\gamma-\frac{E}{3}$. Эту красивую теорему, которая, действительно, находит большое применение в геодезической практике, Лежандр доказывает весьма просто, ограничиваясь в формулах сферической геометрии одними только первыми членами рядов, выражающих тригонометрические функции. Но в более поздних изданиях книги Лежандра вы напрасно стали бы искать эту теорему.

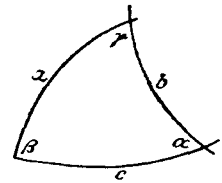

Рис. 144.

Наряду с продолжающимися переизданиями Лежандра появляется еще и другая тенденция, характеризуемая обширным „**Трактатом по геометрии**“ **Руше и Комберусса** [1]).

Во Франции преподавание математики, предшествующее занятиям в высшей школе, поставлено гораздо шире, чем у нас. Переход к высшей школе осуществляется двухлетним курсом в так называемых „классах специальной математики“ („Classes de mathématiques spéciales“), в течение которого на математику отводится не менее 16 недельных часов; этот курс дает всякому, кому позже придется пользоваться математикой, широкое соответствующее образование. Такая постановка дела вызвала потребность ввести в учебники элементарной геометрии **массу нового материала**, что и осуществлено типич-

1) Rouché et de Combérousse. Traité de géométrie, p. 1, 2, 6-е изд., Париж 1891. [Не смешивать с более элементарным учебником тех же авторов „Eléments de géométrie“, переведенным на русский язык.]

ным образом в трактате Руше-Комберусса, пользующемся очень большим распространением; в своих многочисленных дополнительных статьях („Notes") он знакомит учащегося с неевклидовой геометрией, с геометрией треугольника, с геометрией тетраэдра, с учением о важнейших кривых и поверхностях и со многим другим.

Теперь я перехожу к новому движению в пользу реформы преподавания математики, которое началось во Франции около 1900 г. и совершенно сходно с нашими немецкими стремлениями к реформе. Это движение тоже можно поставить в связь со сдвигами, происшедшими во всей картине культурной жизни рассматриваемой эпохи. Невероятный подъем торговли и сношений, техники и промышленности пробуждают во все более и более широких слоях населения настоятельную потребность приобщения ко всем культурным завоеваниям, потребность приобретения знаний во всех областях, среди которых математика занимает далеко не последнее место; при этом, конечно, руководящим мотивом являются не теоретические интересы, а стремление приобрести полезные знания, непосредственно применимые на практике. Но руководителей этого движения ни в коем случае нельзя упрекнуть в плоско утилитарном характере мотивов их деятельности, так как они преследуют высокую цель — поднятие общей профессиональной квалификации.

Характерным для французских условий является то, что эту реформу там начали с обсуждения в палате депутатов в Париже; выбранная палатой комиссия, связавшись с большим числом общественных корпораций, представила подробный доклад о реформе преподавания в средней школе вообще, причем преподавание математики фигурирует лишь как одно из важных звеньев длинной цепи. Главными моментами в этой реформе являются, с одной стороны, упрощение и большая наглядность преподавания, а с другой, — перенесение в курс средней школы ряда вопросов, которые с давних пор считались принадлежностью высшей математики и которые не только вполне доступны, но и имеют прежде всего величайшее значение для современной культуры, в особенности для естествознания и техники. Я имею в виду понятие о функции, методы графических изображений и начала исчисления бесконечно малых. Этим самым хотят достигнуть, в частности, гораздо более тесной увязки арифметики с геометрией, чем какою представляли ее себе когда-либо раньше; это высшая степень фузионизма в самом широком смысле слова. Эта реформа была изложена в учебном плане 1902 г. [1]) и сразу же повсюду проведена в жизнь. В этом единообразии мероприятий проявилось действие вышеупомянутой широкой централизации во Франции также и управления школами, благодаря которой для осуществления такой обширной реформы требуется только соответствующее распоряжение высшей власти, весь ход развития этой реформы подробно изложен в изданных Шиммаком (Schimmak) моих Лекциях о преподавании математики в средней школе" [2]), которые я рекомендую вашему вниманию; там вы найдете много подробных данных, относящихся к организации и развитию преподавания математики вообще, которые дополняют и развивают то, что здесь я сообщаю специально по отношению к геометрии. Что касается новых французских учебных планов, то здесь подчеркну еще раз лишь то, что в них старая элементарная геометрия в евклидовом понимании очень сильно отступает назад перед лицом современных новых идей. Вы найдете подтверждение этому, если присмотритесь к одному из важнейших учебников геометрии, примыкающих к новым учебным планам, а именно к „Геометрии" Бореля (Borel) [3]). Это очень интересная книга, в которой материал расположен простым и естественным образом и, с другой стороны, весьма много места отведено вопросам практики.

[1]) „Plan d'études et programmes d'enseignement dans les lycées et collèges de garcons, Paris 1903.

[2]) T. I „Von der Organisation des mathematischen Unterrichts", Leipzig 1907.

[3]) Borel, Géométrie, Paris 1905. Немецкая переработка принадлежит Штеккелю (P. Stäckel) и издана под названием „Elemente der Mathematik" в двух томах в 1909 г.; во 2-м издании вышли: Т. I в 1919 г., т. II в 1920 г. [Русский перевод учебников Штеккеля, представляющих переработку не только „Геометрии", но и „Арифметики" и „Алгебры" Бореля, был издан под редакцией проф. В. Ф. Кагана в 1911 г. и переиздан в 1923 г. К нему присоединен очерк В. Ф. Кагана „О реформе преподавания математики в средних учебных заведениях Германии и Франции".]

Замечательно то, что в противовес и одновременно с этим теперь среди французских преподавателей снова пробуждается интерес также и к вполне логически разработанной учебной системе элементарной геометрии в духе идеалов Евклида. Тут в особенности я должен назвать вам одну весьма выдающуюся книгу „Новые начала геометрии" Ш. Мерэ (Ch. Méray) в Дижоне[1], которая хотя и появилась еще в 1874 г., но только в последние годы[2]) привлекла к себе внимание более широких кругов. В своих доказательствах Мерэ не пользуется ни одним интуитивным фактом, которого он перед этим не формулировал бы в виде аксиомы; таким образом он развивает полную систему аксиом геометрии. Но при этом Мерэ идет навстречу требованиям действительного преподавания в гораздо большей степени, чем строгие приверженцы Евклида, поскольку он не стремится свести систему аксиом к возможно меньшему числу взаимно независимых предложений и по существу формулирует их лишь тогда, когда в них действительно оказывается надобность. Но особенно характерно для Мерэ то, что он проводит слияние планиметрии со стереометрией настолько полно, насколько это только возможно, и, кроме того, в противоположность Евклиду всюду выдвигает на первое место понятие группы движений и на нем последовательно базирует все свое построение геометрии. Получается построение, совершенно сходное с тем, какое мы недавно наметили: сдвиги и вращения с самого начала вводятся одни наряду с другими; первые доставляют понятие параллельности, а вторые — так как с самого начала рассматривается пространство трех измерений — приводят к понятию перпендикулярности оси вращения по отношению к плоскостям, в которых лежат траектории (круги) каждой точки. Желательно, чтобы вы сами познакомились с весьма интересным точным осуществлением этого построения у Мерэ. Упомяну еще здесь лишь о том, что Мерэ постоянно придает особенное значение точному про-

[1]) „Nouveaux éléments de géométrie"; Nouvelle édition, Dijon 1903; 3 édition 1906.

[2]) [Напомним читателю, что настоящие лекции Клейн читал летом 1908 г.]

ведению всех необходимых в геометрии предельных процессов и при этом пользуется по мере надобности современным понятием о числе в его строгой формулировке, хотя он и не идет в слиянии арифметики и аналитической геометрии так же далеко, как делали это мы.

Влияние точки зрения Мерэ ясно сказывается на современных французских учебниках. Так, понятие движения играет выдающуюся роль в упомянутой книге Бореля; в еще большей мере это видим в новых „Началах геометрии" К. Бурле (C. Bourlet) [1]), автора многих очень распространенных учебников; здесь всюду вполне отчетливым образом говорится о группе движений и о геометрических величинах как ее инвариантах.

На этом мы расстанемся с Францией и перейдем к Италии.

III. ПРЕПОДАВАНИЕ В ИТАЛИИ

Здесь мы видим тоже крайне своеобразный ход развития, характеризующийся совершенно иными чертами, чем те, какие мы наблюдали в Англии и во Франции; типичное выражение его можно поставить в параллель разве что только с Мерэ. Я займусь только современной Италией, начиная примерно с 1860 г. Наибольшее влияние на единообразную реформу преподавания математики в этом новообразованном объединенном государстве имел Л. Кремона (L. Cremona), тот самый Кремона, который известен всем вам своим научным значением в развитии современной геометрии; ведь он является основателем самостоятельного алгебраически-геометрического исследования в Италии, давшего столь замечательные результаты. В соответствии с этой своей научной деятельностью Кремона оказал длительное влияние на преподавание в высших школах, выдвинув на первое место проективную геометрию в связи с начертательной геометрией и графической статикой. Теперь во всем мире инженеры употребляют выражение Kräfteplan Кремоны, и если даже оно исторически и не

[1]) „Eléments de géométrie", Paris 1908.

может быть оправдано, то все же оно ясно свидетельствует о большом влиянии Кремоны.

Замечательно, что на преподавание в средней школе тот же Кремона повлиял в совершенно другом направлении. В знаменитой „Записке“ 1867 г. он рекомендует ввести Евклида, если и не как нечто обязательное, то по крайней мере в качестве образца для всего школьного преподавания геометрии в отношении расположения и выбора материала, а также, главным образом, в смысле идеала строго логического, замкнутого в себе построения геометрии. Таким образом здесь Кремона настаивает в особенности на логической стороне, тогда как в его собственной непосредственной преподавательской деятельности, а также в его научной работе на первый план выступают прежде всего интуитивные моменты [1]). Трудно даже понять, что собственно являлось связующим звеном между этими двумя, повидимому, столь взаимно противоречивыми целеустановками у Кремоны.

Но во всяком случае этот призыв Кремоны 1867 г. упал на крайне плодородную почву, и между итальянскими математиками началось форменное соревнование в деле замены Евклида такими учебниками, которые полностью сохраняли бы как его материал, так и всю его тенденцию, но только осуществляли бы последнюю способом, более отвечающим теперешним уточненным требованиям. Характерно то, что в этой работе принимает участие, точно так же как и во Франции, ряд крупных ученых-математиков, благодаря чему появляется немало очень ценных в научном отношении работ, в педагогическом отношении, правда, стоящих не столь же высоко. Очень интересный реферат о важнейших событиях этого движения составил Лицман (W. Lietzmann) [2]). В дальнейшем я

---

[1]) Ср. в этом отношении, например. Cremona, Elemente der projektivischen Geometrie, 1872. Deutsch von Trautvetter, Stuttgart 1882. [Итальянский оригинал: Cremon, Elementi di geometria projettiva ed uso degli Instituti tecnici del regno d'Italia, Roma 1873. Существует также французский перевод Dewulf'a (Paris 1875).]

[2]) „Die Grundlagen der Geometrie im Unterrichte (mit besonderer Berücksichtigung Italiens)“ („Основы геометрии в преподавании, особенно в Италии“), „Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht“, т. 39, стр. 177, 1908.

хочу отметить, пользуясь отчасти этим рефератом, только некоторые особенно характерные моменты.

Начну с того, что назову перевод Евклида, который издали в 1867 г. Бетти и Бриоски (E. Betti e F. Brioschi) [1]) и который положил начало распространению в Италии знакомства с Евклидом. Он содержит, подобно английским школьным изданиям Евклида, только книги 1—6, 11 и 12. Но, в противоположность английской традиции, наши авторы отнюдь не имеют в виду дать в руки учащимся материал этих книг в его старой форме, а желают лишь дать (преподающим) основу для самостоятельной научной и педагогической переработки.

Из последовавших затем учебников длинный ряд более старых книг еще придерживается по возможности близко евклидовой схемы определений и т. д., причем, однако, явно и точно формулируются все те многочисленные факты интуиции, которыми Евклид пользуется неявно.

Чтобы восполнить пробелы в первой книге, к числу этих молчаливо применяемых Евклидом вещей относят, следуя общепринятому взгляду, также понятие о движении твердого тела и помещают его поэтому в самом начале системы, формулируя ряд „аксиом движения". Но при этом, подобно Мерэ, из педагогических соображений не придают никакого значения взаимной независимости отдельных устанавливаемых здесь аксиом. Типичной для этого направления книгой являются очень распространенные „Начала геометрии" Санниа (A. Sannia) и д'Овидио (E. d'Ovidio) [2]), вышедшие впервые в 1869 г., в которых вы найдете подтверждение всех сделанных мною замечаний. Материал в них тот же самый, что у Евклида, но только представлен он в существенно сглаженной форме. Так, например, всюду избегается пользование понятием о числе, вырабатываемым в чистой арифметике, но зато яснее, чем это делает сам Евклид, выделена раз навсегда из евклидовых доказательств по способу истощения и изложена лежащая в их основе идея предела. Далее, планиметрия и стереометрия внешним образом стоят порознь,

---

[1]) „Gli elementi di Euclide", 36-ая перепечатка, Флоренция 1901.

[2]) „Elementi di Geometria", vol. I, II, 11-е изд., Napoli 1904.

но при этом, очевидно, учтено то, что книгой будут пользоваться в школах с „фузионистским“ учебным планом, так как эти стремления к слиянию планиметрии и стереометрии особенно распространены как раз в Италии. Назову еще хотя бы „Начала геометрии“ Р. де-Паолиса (R. de Paolis) [1]) как учебник, наиболее способствовавший этим стремлениям.

Существенно более, чем эти и родственные им книги, уклоняются от евклидова изложения учебники другой группы, а именно в том отношении, что они стремятся достичь значительно более высокой степени строгости в понимании основ. Авторы их полагают, что у Евклида и в названных выше учебниках многочисленные геометрические основные понятия определены недостаточно строго, и хотят вместо этого обойтись одним лишь единственным основным понятием, а именно — понятием точки, из которого все другие необходимые геометрии образы должны быть построены чисто логическим путем.

В частности, должно решительно избегать при обосновании геометрии также пользования понятием движения твердого тела.

Кульминационный пункт этого развития представляют, пожалуй, различные учебники Дж. Веронезе (G. Veronese), охватывающие всю область геометрии. В данном случае нам не приходится рассматривать его „Основания геометрии многих измерений и многих видов прямолинейных единиц, представленные в элементарной форме“ [2]), так как это не школьный курс, а проведенное в абстрактной форме исследование чисто научной проблемы общей многомерной и „неархимедовой“ геометрии. Здесь же нас интересуют его же учебники „Элементарные сведения по нагляд-

---

[1]) „Elementi di Geometria“, Torino 1887.

[2]) „Fondamenti di geometria a più dimensioni ed a più unita rettilinee esposti in forma elementare“, Padova 1891.

Существует немецкий перевод: „Grundzüge der Geometrie von mehreren Dimensionen und mehreren Arten geradliniger Einheiten in elementarer Form entwickelt“, Übersetzt von A. Schepp, Leipzig 1894.

[Об этой книге можно прочесть в „Историческом очерке развития учения об основаниях геометрии“ В. Ф. Кагана (Одесса 1907).]

ной геометрии"[1]) и „Начала геометрии"[2]). Первая книга является индуктивным введением, которое должно в наглядной форме ознакомить учащихся низшей ступени с различными геометрическими формами, что соответствует примерно нашему пропедевтическому начальному курсу геометрии. Дело в том, что согласно всем итальянским учебным планам систематическое преподавание геометрии в собственном смысле начинается там лишь очень поздно в классах, соответствующих примерно нашим классам секунда[3]); поэтому не следует думать, что все эти точные учебники предназначены для ребят в возрасте наших третьеклассников!

„Начала" Веронезе содержат теоретическое построение геометрии, причем устанавливаются с чрезвычайной полнотой все постулаты, какими бы очевидными они нам ни представлялись. Так, например, в качестве первого постулата явно устанавливается положение: „существуют различные точки", — таким образом мы не рассматриваем, скажем, геометрию, в которой существует только одна точка! Впрочем, при этом всегда хотя бы вкратце упоминается и эмпирическое наблюдение, которое руководит в качестве эвристического принципа при установлении аксиом. Что касается деталей, то Веронезе пользуется прямолинейным отрезком, как основным геометрическим образом, который он определяет как систему точек, удовлетворяющую определенным требованиям. Конгруэнтность таких отрезков вводится в качестве основного понятия, и к нему весьма оригинальным образом сводится все прочее. Так, два треугольника называются конгруэнтными, если все их стороны попарно конгруэнтны, чем определяется также и конгруэнтность углов так что здесь 3-я теорема о конгруэнтности предпосылается (в качестве определения!), и тем самым вводится даже и учение

---

[1]) „Nozioni elementari di geometria intuitiva", 2-ое изд., Verona 1902.

[2]) „Elementi di geometria". Существует в разных вариантах; есть, например, издание для употребления в гимназиях и лицеях, в сотрудничестве с Гаццанигой: „Ad uso dei gimnasi e licei", con collaborazione di P. Gazzaniga. Часть I и II, 3-е изд., Verona 1904.

[3]) [В немецких гимназиях последние два класса называют „прима" („унтерприма" и „оберприма"); им предшествуют два класса „секунда".]

о параллельных линиях: две прямые называются параллельными, если у них имеется центр симметрии, т. е. если они отсекают на всех прямых, проходящих через некоторую точку, попарно равные отрезки. С другой стороны, Веронезе тоже строго придерживается евклидовых границ в отношении выбора материала; в частности, он, конечно, избегает всякого пользования арифметикой. С этой книгой Веронезе родственны по содержанию „Элементы геометрии" Ф. Энриквеса и У. Амальди (F. Enriques e U. Amaldi)[1], но только они наряду со строгой систематикой в значительно более высокой степени подчеркивают также и педагогические моменты.

Еще дальше, чем Веронезе, пошла в том же абстрактном направлении так называемая школа Пеано. Дж. Пеано (G. Peano) в Турине[2]) стремится к тому, чтобы провести чисто логическую, свободную от элементов интуиции, обработку математики во много раз строже, чем это имело место в рассмотренных до сих пор аксиоматических исследованиях; для этой цели он придумал особый язык формул (Formelsprache) (так называемую идеографию)[3]), который должен заменить обыкновенный язык. При этом Пеано исходит из той мысли, что иначе невозможно избежать вмешательства нелогических моментов по причине многочисленных ассоциаций, невольно вызываемых привычными нам словами.

Это приводит в конце концов к идеалу, состоящему в том, чтобы оперировать с символами, которые сами по себе лишены всякого значения по „произвольным" правилам, которые тоже в свою очередь сами по себе ничего не должны означать. Пеано основал большую школу, которая теперь в Италии пользуется широким распространением и большим влиянием. Вместе со своими учениками он издает так называемый („Formulaire"), в котором все отделы математики должны быть изложены на языке формул со стороны их чисто логического содержания.

Спросим себя, благоприятствует ли прогрессу науки такое доведенное до крайности подчеркивание

---

[1]) „Elementi di Geometria", 2-е издание, Bologna 1905.

[2]) [Род. 1858, умер 20 IV/1932.]

[3]) Ср. также т. I, стр. 17 (17).

чисто логических моментов? Я воспользуюсь таким сравнением: многие люди, поднимаясь с долины на гору, испытывают удовольствие от вдыхания более чистого и редкого воздуха; однако, отсюда не следует, что все большее и большее разрежение воздуха всегда будет повышать хорошее самочувствие; существует граница, за которой вообще прекращается всякая возможность существования. Подобно этому, я полагаю, что то воодушевление, с каким логики стремятся изгнать всякую интуицию (поскольку это, вообще говоря, возможно, так как символы Пеано тоже вносят в его систему как таковые еще некоторый остаток интуитивных элементов!), является несколько необдуманным; хотя иным, быть может, вначале и очень приятно чувствуется в этой более чистой логике, однако и здесь существует некоторый оптимум в распределении долей логики и интуиции, которого нельзя без вреда переходить в сторону увеличения доли первой!

Конечно, с точки зрения чистого *исследования* следует приветствовать всякий новый подход и ожидать от него новых успехов и импульсов. Но в данном случае необходимо вынести наше заключение также и с точки зрения *педагогики*, так как эти абстрактные тенденции, повидимому, во многих случаях оказывали влияние также и на школьное преподавание. Такое заключение должно будет носить более отрицательный характер: можно, несомненно, ожидать того, что при школьном преподавании в таком духе многие ученики совсем ничему не научатся, а те немногие, которые вообще в состоянии будут следить за учителем, получат от преподавания во всяком случае не то, что они смогли бы применить в будущем.

И действительно, в Италии уже, повидимому, наступила *реакция* против этих чрезмерно абстрактных тенденций в преподавании, также и *в высшей технической школе*, так как именно в последних чистые логики во многих случаях, как это ни удивительно, имели перевес. Там теперь жалуются на плохую математическую подготовку средних студентов, которые не в состоянии следить за отвлеченными рассуждениями.

Еще раньше мне рассказывали в качестве примера недостаточной согласованности с действительными потребностями, что на лекциях для инженеров сперва доказывают теорему Тэйлора для любого числа переменных и уже после этого рассматривают эту же теорему для одной переменной, как частный случай.

Также и по отношению к преподаванию в средней школе в последнее время обнаруживаются стремления к реформе, которые совершенно в духе нашего и французского движения ставят своей целью отказ от преимущественного направления внимания в сторону абстрактной логики и от точного следования Евклиду в выборе материала и оживление преподавания путем введения наглядных моментов, путем включения важнейших общих понятий современной науки (понятие о функции) и, наконец, также путем увязки с приложениями. Вождем этого движения является Джино Лориа (Gino Loria), который в 1904 г. на 3-м международном математическом конгрессе в Гейдельберге прочитал доклад о преподавании математики в Италии [1]) и после того говорил о своем проекте реформы в очень интересном докладе [2]), прочитанном на съезде итальянского союза учителей средней школы „Матезис". Учреждение этого союза свидетельствует о том, что теперь учительские круги Италии проявляют живой интерес к современным идеям, и хотя в новых учебных планах 1905 г. [3]) последние сказываются едва заметным образом, но все же можно, вероятно, рассчитывать на то, что итальянские школы постепенно освободятся от уз крайнего увлечения логикой и получат более современное оформление преподавания.

Теперь, наконец, мы обратимся к нашей родине.

IV. ПРЕПОДАВАНИЕ В ГЕРМАНИИ

Здесь мы включим в наш обзор также и все страны с немецким разговорным языком, каковы немецкая Швейцария и Австрия. Ход развития преподавания в Германии

---

[1]) Verhandlungen des 3. Internationalen Mathematiker-Kongresses S. 594, Leipzig 1905.

[2]) Существует немецкий перевод: „Vergangene und künftige Lehrplane", deutsch von H. Wieleitner, Leipzig 1906. („Прошлые и будущие учебные планы.")

[3]) „Instruzioni e programmi vigenti nei gimnasi e licei", Torino 1905 („Инструкции и программы, действующие в гимназиях и лицеях").

принадлежит к совершенно иному типу, чем в прочих странах. Здесь прежде всего нехватает того единообразия в ходе развития, которое в других странах получалось в результате строгой государственной организации либо вмешательства сильной личности. В Германии преподавание в каждом отдельном государстве развивалось самостоятельно по своим собственным путям и, сверх того, у отдельных учебных заведений, у отдельных преподавателей всегда еще оставался сравнительно большой простор для самостоятельной деятельности. В результате возникло множество разнородных импульсов из самых различных источников, и они по большей части успевали оказать свое воздействие еще раньше, чем они были учтены в официальных учебных планах. Здесь я могу выхватить, конечно, лишь немногие точки зрения, которые имели особенно большое значение для развития преподавания в последние десятилетия, начиная примерно с 1870 г., и отсылаю вас и в данном случае за дополнительными сведениями к подробному изложению общих линий развития в книге Клейна-Шиммака [1]).

Особенно важная тенденция, которая стала проявляться, начиная с семидесятых годов в связи с возросшей в период национального подъема того времени потребностью широких слоев населения в образовании, имеет своим источником (новые) движения в области обучения в народных школах. Я имею в виду тот взгляд, согластно которому в начальном обучении на первом месте непременно должно стоять непосредственное созерцание, что это обучение всегда должно быть увязано с видимыми, вполне знакомыми ученику вещами. Эти идеи ведут начало, как известно, от знаменитого швейцарца Г. Песталоцци (H. Pestalozzi), на которого вообще надо смотреть, как на основателя начального обучения в современном смысле. Время его деятельности приходится, круглым счетом, на 1800 г. Несомненно для каждого математика интересно познакомиться с оригинальными произведениями Песталоцци, имеющими отношение к математике; это — „Das ABC der

[1]) Цитировано на стр. 371.

Anschauung oder die Anschauungslehre der Massverhaltnisse" („Азбука наглядных представлений иил наглядное учение о соотношениях меры") [1]) и „Die Anschauungslehre der Zahlenverhältnisse"). („Наглядное учение о числовых соотношениях") [2]) Задача этих книг — показать, как можно совершенно неподготовленного ученика довести до полного освоения простейших фактов пространственной и числовой интуиции. Несомненно, что всякого, кто ждет от этих книг чего-либо особенно увлекательного, постигнет большое разочарование; они представляют собою, пожалуй, самое скучное из всего, что только мне случалось когда-либо держать в руках, так как они только излагают очень подробно и с ужасающей систематичностью все возможные тривиальные соотношения. Приведу один только пример: ребенок должен узнать, что квадрат можно разделить горизонтальными и вертикальными линиями на равные части (рис. 145). С этой целью Песталоцци не только приводит таблицу, содержащую все 100 комбинаций делений при помощи 0, 1, 2, ..., 9 вертикальных и горизонтальных линий, но, кроме того, он описывает также и в тексте число, положение и т. д. частей, имеющих вид квадратов либо прямоугольников, в каждом отдельном случае все время по одной и той же схеме и притом самым подробным, какой только можно вообразить себе, способом. Это следует, вероятно, понимать в том смысле, что Песталоцци хотел даже самому ненаходчивому народному учителю, — а вед он тогда должен был считаться с совершенно недостаточно подготовленным материалом, — дать богатое собрание примеров, из которого учитель мог бы любую часть по своему усмотрению положить слово в слово в основу своего преподавания.

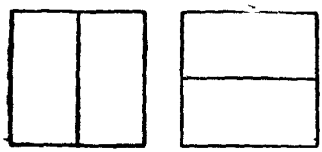

Рис. 145.

В дополнение я предлагаю здесь вам еще книжечку геттингенского философа Гербарта (J. F. Herbart), сыграв-

[1]) В 2 тетрадях, Zürich und Tübingen 1803.
[2]) В 3 тетрадях, Zürich und Tübingen 1803—1804.

шего особенно деятельную роль в распространении этих идей, „Pestalozzis Idee eines ABC der Anschauung“ [1]) („Идея Песталоцци об азбуке наглядных представлений“). В ней мысли Песталоцци развиты в не столь схематичной и потому более интересной форме. В частности, Гербарт считает желательным, чтобы ребенок познакомился со всевозможными формами треугольников. Поэтому в одной таблице он дает углы треугольника, а также углы, лежащие справа и слева от высоты, через каждые пять градусов (рис. 146), а в другой таблице соответствующие длины сторон с тем, чтобы заставить ребенка проверить эту таблицу путем измерений. Замечательно также и другое его предложение — запечатлеть в представлении ребенка различные формы треугольников, помещая перед его глазами уже в колыбели таблицы с самыми различными формами треугольников.

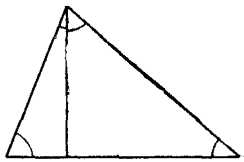

Рис. 146.

Песталоцци и Гербарт оказали **мощное воздействие на преподавание в народных школах**, которое сказывается еще и до сих пор. Вы можете обнаружить ясные следы влияния идей Песталоцци в большинстве учебников геометрии для народных школ.

В очень характерной форме сохранилось до сих пор учение Песталоцци о наглядных представлениях в наших **детских садах**, история которых восходит к нему, и соответственно, к Ф. Фребелю (F. Fröbel); в них ребятишки знакомятся с простейшими пространственными формами, играя надлежащим образом подобранными предметами.

Но вскоре эти педагогические идеи проникли и в среднюю школу. В этом отношении особенно характерен учебный план, составленный **около** 1850 г. **для Австрии Экснером** (Exner) и **Бониццем** (Bonitz). И в этом случае надо искать в политическом положении объяснение того, почему именно здесь и именно в эту эпоху возникло рассматриваемое движение. В Австрии под влия-

[1]) Göttingen 1802.

нием многочисленных школ, принадлежащих католическим монашеским орденам, особенно иезуитскому, в преподавании математики по существу сохранялся догматический метод средневековья, и когда революционное движение 1848 г. смыло все старое, то среди наличного материала ничто не могло послужить отправным пунктом, и поэтому реформаторы вводили новое в самой чистой форме. Этим и объясняется то, что учебные планы Экснера-Боница перенесли в среднюю школу новые наглядные методы, насколько это только было возможно. Пространственное созерцание не только культивируется в классах первой ступени, как подготовительный курс, но становится самоцелью. Следует не только упражнять логическое мышление на наглядных вещах, но речь идет об упражнении самого созерцания. На первой ступени (первые четыре года) логическая сторона вообще совершенно стушевывается, дети упражняются только в наглядном освоении фигур, постоянно сопровождаемом черчением. На второй ступени, на которой приобретенный таким образом материал подвергается логической переработке, черчение сохраняется в значительном объеме. Многие из вас имели, вероятно, случай заметить, как умело чертят австрийские математики,—один из результатов этой характерной структуры учебных планов.

Эти же самые тенденции стали проникать в начале семидесятых годов также и в Пруссию и вообще в Северную Германию.

Здесь следует отметить и тот момент персонального характера, что Бониц занял тогда в прусском министерстве народного просвещения руководящий пост. Принципы этой реформы были формулированы для Пруссии в учебных планах 1882 г. С внешней стороны их характеризует введение геометрического подготовительного курса, так называемой геометрической пропедевтики во втором классе (Quinta) гимназий; на этих уроках ученик должен освоиться в наглядной форме с теми вещами, которые позже составят содержание научной системы геометрии. Сравните с этими замечаниями, кроме книги Клейна-Шиммака, также мою статью „100 лет преподавания математики в средних школах Пруссии“ [1]), в которой я пытался вообще изобразить ход развития нашего преподавания математики за последнее столетие.

Учебником, в котором тенденции реформы 1882 г. нашли, пожалуй, наиболее выпуклое выражение, является „Методический курс элементарной математики“ Гольцмюллера (Holzmüller) [2]). Здесь характерно уже само название: „методический“ мыслится как противоположность „систематическому“; курс должен дать не окостенелую дисциплину в духе Евклида, а естественный ход обучения, при котором учитываются все данные преподавательского опыта, чтобы наиболее действительным образом помочь учащемуся. Далее, здесь перед нами не учебник одной только геометрии или только арифметики как таковой, но изложена вся элементарная математика с переменным чередованием ее отдельных частей в том виде, в каком их действительно можно проходить, причем ясно выступают также и их взаимные соотношения. С другой стороны, изложение геометрических отделов всегда начинается с действительного черчения и с построений. Особенное значение придается выработке пространственных представлений, стереометрическому черчению. При этом каждый раз требуется не только убедиться в возможности построения, но и действительно выполнить его в чистом и полном виде. При этом геометрические теоремы часто получаются как бы мимоходом; так, например, теоремы о равенстве треугольников получаются из того наблюдения, что построение треугольника по трем данным его элементам получается однозначным образом. Я должен, далее, отметить, что в соответствии с указанной тенденцией в курс вплетены также отчасти основные положения проективной геометрии. Конечно, я не могу умолчать о том, что у Гольцмюллера

[1]) В книге W. Lexis, Die Reform des höheren Schulwesens in Preussen“, Halle 1902. Перепечатано в Jahresbericht der deutschen Mathematiker-Vereinigung, т. 13, стр. 347 и сл., 1904; и в книге F. Klein und E. Riecke, Neue Beiträge zur Frage des mathematischen und physikalischen Unterrichts an höheren Schulen, стр. 63 и сл., Leipzig 1904.

[2]) Methodisches Lehrbuch der Elementarmathematik“, в трех частях, Leipzig (Teubner), 1894—1895, а также многочисленные новые издания.

логические моменты в различных местах оказываются, пожалуй, слишком урезанными; но ведь это старая истина, что невозможно одновременно получить удовлетворительные результаты во всех направлениях. Если подчеркивать преимущественно логику, то страдает наглядность, и наоборот.

Положительные результаты описанных здесь стремлений теперь перешли, пожалуй, всюду в постановку преподавания, но, разумеется, стали постепенно присоединяться опять-таки новые импульсы. Сюда относится прежде всего, как и во всех других странах, сильное движение, начавшееся в Германии около 1890 г. и стремящееся к более сильному подчеркиванию приложений математики во всех областях естествознания, в особенности же в технике, а также ее значения для всех сторон человеческой жизни. Это движение вносит по сравнению с тенденцией, преследующей наглядность, нечто существенно новое. А именно, если последнюю можно еще увязать с чисто формальными целями, то здесь речь идет о действительно плодотворном применении математического мышления к различным другим областям. В близком отношении к этим стремлениям находятся те реформаторские тенденции, которых мы так часто касались в первом томе этого сочинения, и которые поэтому мне достаточно здесь просто перечислить: введение понятия о функции графических методов и начатков исчисления бесконечно малых; все это дает много новых импульсов также и для преподавания геометрии.

Но зато несколько подробнее я остановлюсь на некоторых новейших тенденциях, идущих еще дальше, которыми математикам следует заняться более внимательно, чем они это делали до сих пор.

а) В первую очередь я имею в виду некоторые результаты современных психологических исследований, в частности результаты экспериментальной психологии, а также современной гигиены. Уже Гербарт пытался при построении педагогики опереться на психологию, но выполнение этой задачи получило совершенно иную основу с тех пор, как психология выработала для себя точные экспериментальные методы.

Подумайте, например, о том, насколько важно для педагогики исследование памяти, как важно, например, для нее знать, каким образом факты схватываются памятью и сохраняются в ней, в какой мере это зависит от обстановки или от личного настроения индивида. И действительно, теперь психологи во многих местах, в том числе и здесь в Гёттингене, много занимаются этими вопросами. Столь же важно для педагогики исследование утомления, например, вопрос о том, имеется ли зависимость между физическим и умственным утомлением. В прежнее время полагали, что предшествующее физическое напряжение делает людей особенно способными к умственной работе, теперь же пришли в общем на основании сделанных наблюдений к противоположному взгляду.

Особенно важной в этой области, и притом как раз и по отношению к математике, является проблема различий в индивидуальной одаренности. Было время, когда господствовало твердое убеждение в том, что только очень немногие ученики обладают „математическими способностями", желая этим сказать, что только они в состоянии вообще хотя бы что-нибудь понять из математики, тогда как все остальные даже при самом большом напряжении не смогли бы ничему научиться. Объяснение того обстоятельства, что подобный взгляд мог получить столь всеобщее распространение, можно искать исключительно в недостатках господствовавшего тогда метода преподавания. Когда же впоследствии в связи с учебными планами Экснера-Боница стали придавать большее значение педагогическому искусству, то пришли вскоре к противоположному мнению, согласно которому всякий ученик при наличии доброй воли и при некотором напряжении также и со стороны учителя в состоянии научиться чему-нибудь дельному по математике. Я надеюсь, что экспериментально-психологические исследования доставят данные для решения вопроса о том, как с этим обстоит дело в действительности. Несомненно, что даже среди вообще говоря способных людей встречаются совершенно „аматематические" индивиды, которым математическое мышление абсолютно чуждо. В том, что среди даже особенно даровитых в художественном отношении натур попадаются такие аматематики, убедил меня недавно очень интересный разговор со знаменитым берлинским архитектором Месселем (Messel), который всем вам известен, между прочим, столь же целесообразным, сколь ценным в художественном отношении зданием универмага Вертгейма. Когда он услыхал, что я математик, то стал говорить самым резким образом о всем том бесполезном хламе, которым так много мучают в школе и который во всяком случае для него лично всегда оставался без всякого значения. Быть может, было бы умнее предоставить подобным натурам пройти курс школы без всякой математики, чем напрасно биться над тем, чтобы сообщить им хотя бы какие-нибудь математические знания. При этом большей частью добиваются только того, что возбуждают в них сильнейшее отвращение к этим вещам, которых они не в состоянии понять, и тем создают для математики влиятельных врагов. Разумеется, это относится только к очень немногим натурам, которые при прекрасных задатках в прочих отношениях лишены односторонним образом математических способностей, и это отнюдь не должно быть использовано как аргумент в защиту лености и праздности или той старой теории о „всеобщей неспособности к математике“.

Дальнейшие важные задачи, которые математика ставит перед психологией, относятся к несомненно имеющимся более тонким различиям в характере математического дарования, которые проявляются у продуктивно научно работающих математиков, но имеют несомненно большое значение и для педагогики. Ведь каждый день приходится наблюдать, что один математик более расположен к абстрактно-арифметическим исследованиям, а другой предпочитает оперировать с геометрически-наглядными образами. Уже проведено, в частности, психологическое обследование таких людей, выработавших в себе выдающиеся способности в одной какой-нибудь узко ограниченной области, знаменитых вычислителей или шахматных игроков, и в этих случаях тоже обнаружили огромные различия; так, теперь известно, что те большие числа, с которыми вычислители производят действия, одни из них как бы видят перед собою записанными с помощью цифр (зрительное предрасположение), тогда как другие работают аудитивно (на-слух), связывая свои ассоциации со звуками слов, выражающих числа. Рекомендую вам в этом отношении интересную книгу Бине (Binet) „Психология знаменитых вычислителей и игроков в шахматы“ [1]).

b) Вторая тенденция, часто проявляющаяся в последнее время, о которой я хочу еще здесь упомянуть, соприкасается с тем, что я только что говорил о математической предрасположенности лиц с выдающимися художественными дарованиями; я имею в виду современное так называемое художественное воспитание (Kunsterziehung) и о нововведениях в современном преподавании рисования. Здесь цель заключается в том, чтобы как можно скорее довести ученика до живого интуитивного представления вещей в целом, в большом а не начинать с изучения их деталей. Особенно интересным представляется это стремление, проявляющееся также сходным образом у некоторых выдающихся инженеров, в развитии преподавания рисования. В прежнее время главное значение во многих случаях придавали тому, чтобы каждый ученик научился в точности воспроизводить определенные контуры по данным образцам, — прием, который слишком часто имел своим результатом слабый интерес и слабые успехи. Я вспоминаю, как в мое школьное время я должен был снова и снова копировать все время одну и ту же арабеску, потому что она никак не удавалась мне, что нисколько, разумеется, не содействовало развитию у меня способности рисовать. Теперь же в противоположность этому ребенку дают в руки с самого начала кисть и краски и предоставляют ему срисовывать (красками) по собственному его впечатлению простые, повседневные предметы в том виде, как он их видит непосредственно перед собою, либо по воспоминанию. При этом отнюдь не преследуется задача точного воспроизведения деталей; они могут быть крайне

---

[1]) „Psychologie des grands calculateurs et joueurs d'echecs“, Paris 1894. Новейшие исследования этого рода можно найти в работе C. Kroh „Eine einzigartige Begabung und deren psychologische Analyse“, Göttingen 1922 („Односторонняя одаренность и ее психологический анализ“), которая возникла в связи с экстраординарными вычислительными способностями математика Рюкле (G. Rückle).

неточны, если только схвачено общее впечатление. Теперь можно видеть всюду на школьных выставках, какие поразительно хорошие результаты достигаются этим методом даже и у детей безо всякого специфически художественного дарования.

Конечно, это направление представляет полную противоположность математическому черчению, поскольку последнее должно ставить на первое место точное, даже количественно правильное фиксирование всех деталей. Естественно, что эти две тенденции легко могут затеять самую ожесточенную борьбу между собой, если одна либо другая применяется слишком односторонне. Так, например, бывает, что в начертательной геометрии с большим трудом строят очень много отдельных точек кривой, но так как за недостатком необходимых рисовальных навыков эти точки получаются, быть может, очень неточно, а чертящий не имеет правильного представления о том, как должна выглядеть кривая, то он проводит через эти точки вместо правильной кривой невозможные каракули, которые во всяком случае не дают никакого представления о подлежащих изображению действительных пространственных соотношениях. Точно так же и художественное рисование может перейти в каррикатуру; детали получаются до того расплывчатые, что если на некотором расстоянии и можно надеяться что-нибудь узнать, то уж вблизи видна только одна неопределенная клякса. Но я полагаю, что при разумном руководстве оба направления вполне могли бы согласоваться и взаимно дополнять одно другое, что было бы крайне желательно в интересах дела. И для самой математики было бы весьма нецелесообразно занять здесь принципиально враждебную позицию по отношению к новому, быстро развивающемуся движению. Много интересного материала содержит в направлении взаимного понимания книга Фр. Шиллинга (Fr. Schilling) „О приложениях начертательной геометрии“ [1]), в которой, между прочим, говорится также и об отношениях к искусству.

---

[1]) „Über die Anwendungen der darstellenden Geometrie“. Leipzig und Berlin 1904, см. также 3-ю тетрадь F. Klein und E. Riecke: Neue Beiträge zur Frage des mathematischen und physikalischen Unterrichts an höheren Schulen, Leipzig und Berlin 1904.

В связи со всем этим я хотел бы еще упомянуть о часто цитируемой, чрезвычайно резкой критике знаменитого философа Шопенгауэра, направленной против математики, так как эта критика необычайно характерна для враждебности по отношению к нашей науке со стороны натур более, предрасположенных к искусству. Шопенгауэр считает нанизывание отдельных логических выводов, которую должно содержать строгое математическое доказательство, недостаточным и невыносимым. Он хочет сразу, так сказать, с одного взгляда, интуитивно убеждаться в истинности теоремы; это привело его к теории, согласно которой, наряду с теми логическими дедукциями, исходящими из определенных предпосылок, существует якобы еще другой метод математических доказательств, который выводит математическую истину непосредственно из интуиции. С этой точки зрения он в своем главном произведении „Мир как воля и как представление“ [1]), как и в других сочинениях, самым страстным образом принципиально осуждает всю евклидову систему; в особенности евклидово доказательство пифагоровой теоремы служит предметом его нападок. Он называет это доказательство „мышеловочным“: оно, пожалуй, действительно в конце концов заставляет согласиться со справедливостью утверждения тем, что коварно запирает поочередно все, какие только могут быть, выходы, но никогда не приводит к внутреннему познанию истины. Ни один математик не может согласиться с Шопенгауэром в этих его рассуждениях, ибо какую бы огромную роль ни приписывали мы в математике интуиции, как эвристическому принципу, содействующему прогрессу науки, но в конце концов в качестве последней единственно решающей инстанции должно будет выступить логическое доказательство, которое исходит из сделанных предположений.

Укажу в связи с этим на очень интересно написанную академическую торжественную речь „о ценности и мнимой непригодности математики“ А. Прингсгейма

---

[1]) „Die Welt als Wille und Vorstellung“. См. в издании Frauenstädt, Werke, Leipzig 1859, II, стр. 82 и сл.; III, стр. 142; а также I, стр. 135 [существует несколько русских переводов].

(A. Pringsheim)[1]), в которой как раз подробно рассматриваются нападки Шопенгауэра.

Конечно, если бы Шопенгауэр нападал только на раздробленную, лишенную плавности форму изложения у Евклида, если бы он желал более наглядной разработки идей каждого доказательства и вообще, наряду с логикой, более полного признания роли интуиции, то с ним можно было бы вполне согласиться. Но и в таком случае евклидово доказательство теоремы Пифагора оказалось бы не очень подходящим объектом для его нападок; дело в том, что именно это доказательство я считаю по самой его идее, если отвлечься от внешних качеств евклидовой манеры, особенно наглядным, как ясно видно из такого его изложения.

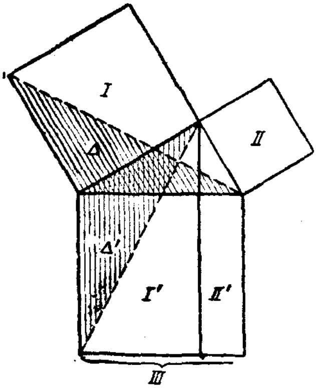

Рис. 147.

Чертим известную фигуру (рис. 147) прямоугольного треугольника с квадратами I, II на катетах и с квадратом III на гипотенузе; опускаем на гипотенузу высоту треугольника, продолжение которой делит квадрат III на два прямоугольника I' и II', так что

$$III = I' + II'. \tag{1}$$

Теперь покажем, что прямоугольник I' равен квадрату I Для этого проводим обе вспомогательные пунктирные прямые и рассматриваем наискось заштрихованный треугольник Δ и вертикально заштрихованный треугольник Δ'. Первый из них имеет, очевидно, с квадратом I общее основание и высоту и поэтому равен, как известно, его половине:

$$\Delta = \frac{1}{2}\, I.$$

[1]) „Über Wert und angeblichen Unwert der Mathematik" (Jahrebericht der deutschen Mathematiker-Vereinigung, Bd. 13, стр. 357, München 1904.

Точно так же вертикально заштрихованный треугольник $\triangle'$ равен половине прямоугольника I':

$$\triangle' = \frac{1}{2} I'.$$

Наконец, усматриваем, что оба треугольника конгруэнтны и, следовательно, равны по площади:

$$\triangle = \triangle',$$

а потому действительно:

$$I = I'.$$

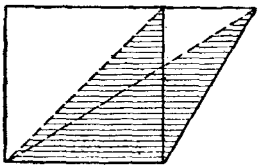

Рис. 148.

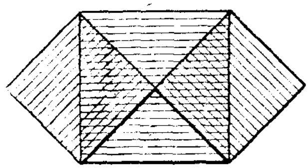

Рис. 149.

Таким образом можно доказать, что

$$II = II',$$

откуда, в связи с фактом (1), действительно вытекает пифагорова теорема:

$$III = I + II.$$

Таким образом здесь доказательство проведено совершенно коротко и, казалось бы, вполне ясным для всякого человека способом. При этом интуиция и логика переплетаются таким образом — и в этом я вижу идеал, — что каждый логический шаг тотчас же приводится также к наглядной очевидности. Вспомогательную теорему

$$\triangle = \frac{1}{2} I,$$

которой мы здесь пользуемся, тоже можно, как известно сделать вполне наглядно ясной при помощи рис. 148

на котором $\triangle$ получается из половины квадрата I путем сдвига отдельных горизонтальных полосок (принцип Кавальери!). Конечно, в том, чтобы эти простые идеи получили правильную и ясную форму, существенную роль играет более плавное по сравнению с евклидовою окостенелою схемою изложение и удачно выбранные обозначения. Особенно я настаиваю на том, чтобы еще шире применять в преподавании для различения линий и площадей различные штриховки или еще лучше, что, к сожалению, в настоящем тексте не осуществимо, различные краски вместо евклидова приема обозначить буквами исключительно только углы; несравненно легче найти „красный" или „желтый" треугольник, чем медленно разыскивать сперва вершины E, K и L в сложной фигуре.

Таким образом я полагаю, что нападки Шопенгауэра на евклидово доказательство по существу совершенно несправедливы; это станет еще яснее, если посмотреть, чем он желал бы его заменить. Он дает известное доказательство Платона (рис. 149), которое, действительно, можно понять при одном взгляде на чертеж, и ограничивается тем, что требует подобного же и для общего случая. Но ведь это приводит как раз к евклидову доказательству в разумном его изложении; и, действительно, оба доказательства, если посмотреть в корень вещей, совершенно в равной мере составлены из логики и из интуиции с тою разницею, что случай Шопенгауэра как более специальный позволяет, естественно, и несколько более простое решение, так что здесь и для неопытного в этих вещах человека легче сразу интуитивно постичь содержащуюся в доказательстве цепь логических выводов.

Но довольно о Шопенгауэре; разрешите теперь закончить наши замечания, относящиеся к развитию преподавания геометрии в Германии. До сих пор мы по существу следили лишь за той линией развития, которая началась с тенденций Песталоцци-Гербарта, имевших в виду сначала обучение в народных школах. Теперь мы рассмотрим, какое влияние на преподавание в средней школе оказало у нас в Германии преподавание математики в высшей школе. Здесь перед нами раскрывается гораздо менее утешительная картина, чем в других странах. Как раз в геометрии обнаруживается то, вызывавшее так много жалоб явление, что высшая и средняя школы двигались по совершенно различным путям, без всякого живого взаимодействия между ними. Исключением являются в первой половине XIX столетия представители так называемой новой геометрии, в особенности Мёбиус и Штейнер, работы которых мы уже не раз цитировали в этом курсе. Но позже одновременно с большим подъемом математической науки эта отчужденность все более и более усиливается, и только в последнее десятилетие мы можем с чувством удовлетворения констатировать возобновление живых попыток заполнить эту пропасть.

В качестве самого выдающегося явления в этом направлении я снова назову вам „Энциклопедию элементарной математики" Г. Вебера и И. Вельштейна, из которой здесь для нас особый интерес представляют том II („Элементы геометрии")[1]) и том III („Прикладная элементарная математика")[2]); во втором томе вы найдете основания геометрии (Вельштейн), тригонометрию (Вебер и В. Якобсталь) и аналитическую геометрию (Вебер), а в третьем — теорию векторов и графику (Вельштейн). Впрочем, в этой энциклопедии не вполне реализовано то, что я считаю желательным для школы, как я уже объяснял раньше[3]); в частности, в геометрических частях составители во многих случаях ограничиваются тем, что развивают, правда, в очень интересной, но и крайне абстрактной форме некоторые вещи, которыми они сами особенно много занимались, тогда как было бы лучше дать общую ориентировку относительно всей области геометрии, поскольку она имеет отношение к школьному преподаванию. В противоположность этому, вы ведь знаете из моих неоднократных заявлений, в чем именно я вижу конечную цель моих собственных лекций. Я хотел дать общую картину всей геометрии, в которой равномерно были бы представлены все

[1]) 3-е изд. Leipzig 1915. [Русский перевод под ред. проф. В. Ф. Кагана в двух выпусках, Одесса 1909 и 1910, изд. Матезис.]

[2]) 3-е изд. в двух частях, Leipzig 1924.

[3]) См. т. I, стр. 422.

ее части и которая позволяла бы охватить всех их одним взглядом, вместе с их взаимоотношениями. Разумеется, я мог лишь в качестве постулата утверждать, что должно пытаться исследовать, в соответствии с отдельными устанавливаемыми здесь точками зрения, что именно из всего этого материала подходит для школы и насколько вообще можно учесть наши результаты в школьном преподавании.

Уже много раз брались за разрешение этой проблемы, но в действительности никогда еще ее не разрешили; и я не могу не упомянуть еще хотя бы о следующих двух интересных книгах, в которых значительная часть относящихся сюда вопросов переработана с целостных точек зрения. Одна из них — австрийский учебный план 1900 г.[1]), который придерживается основ реформы Экснера-Боница 1850 г. Как и в той реформе, здесь различается первая и вторая ступени гимназии (каждая по 4 года), причем на первой ступени преподавание геометрии проводится исключительно в наглядной форме в соединении с очень большим курсом черчения; последний продолжается также и на второй ступени, наряду с начинающимся там логическим курсом геометрии. Самым интересным в этом учебном плане являются подробные объяснения, относящиеся к преподаванию математики, которые выдают крайне сведущего составителя; но мне не удалось узнать его имени. Здесь перед нами отрадный контраст с обычными официальными учебными планами, которые в математической части бывают по большей части столь сжато составлены, что из них едва ли можно почерпнуть что-либо определенное.

Вторая книга, которую я хотел назвать — „Учебник элементарной геометрии“ Генрици и Трейтлейна[2]). В ней составители с успехом попытались учесть результаты новых по тому времени исследований, проективную геометрию, а также приложения; излагается также и аналитическая геометрия в органической связи

[1]) „Lehrplan und Instruktionen für den Unterricht an Gymnasien in в Österreich“, 2. Aufl., Wien 1900.

[2]) Henrici und Treutlein, Lehrbuch der Elementargeometrie. трех частях, Leipzig 1882—1883; с тех пор ряд новых изданий.

с прочим материалом, а именно с тригонометрией. В частности, отмечу, что подразделение материала происходит по классам геометрических преобразований, как мы это делали выше и как впервые поступил Мёбиус в своем „Барицентрическом исчислении“: конгруэнтность, подобие, перспективное соответствие.

Что же касается приложений, укажу, что в конце второй части находится межевая карта великого герцогства Баден (авторы сами баденцы), так что учащийся получает живой образ цели тригонометрии; я считаю, что от такой живой связи с отечествоведением, подкрепленной действительным выполнением измерений на местности, преподавание выигрывает чрезвычайно. По аналогии в наших школах следовало бы, например, показать гауссову съемку королевства Ганновер, так что каждый ученик узнал бы, в чем заключается ее связь со знаменитым треугольником Высокий Гаген — Брокен — Инзельсберг. Таким образом книга Генрици-Трейтлейна в высшей степени заслуживает внимания. Конечно, с теперешней точки зрения можно сожалеть, что в ней отсутствуют те общего характера преобразования, выходящие за пределы линейных преобразований проективной геометрии, какие мы выше рассматривали, и что в связи с этим не приняты во внимание также и современные требования функционального мышления и т. д.; не достает также и философского заключительного отдела (т. е. разъяснений, относящихся к аксиоматике и т. п.), о желательности которого для старших классов школы теперь часто говорят.

Мы подошли теперь, уважаемые слушатели, к концу наших совместных занятий; если мне и случилось уже многое рассказать вам в последнем разделе о том, как теперь повсюду в школах забила свежая струя, то все же я думаю, что проблема реформы преподавания математики вообще и, в частности, геометрии выдвинется в ближайшие годы в несравненно большей мере в центр общего интереса. Вы все призваны сотрудничать по мере сил в разрешении этой столь важной задачи — сотрудничать на основе самостоятельного размышления обо всех относящихся сюда вопросах и свободно от гнета всесильной окаменелой традиции. Вы будете в состоянии сделать это, если составите себе достаточное общее представление обо всех относящихся сюда областях науки и об истории их развития, а для этого — хочу надеяться — вам дали некоторую основу эти мои лекции.

ДОБАВЛЕНИЕ I

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ ПО НЕКОТОРЫМ ВОПРОСАМ ЭЛЕМЕНТАРНОЙ ГЕОМЕТРИИ

1. Рефераты в энциклопедии

Если желательно найти в каком-либо направлении дополнение к научной части этой книги, то целесообразнее всего обратиться сначала к 3-му тому „Энциклопедии математических наук". Мы имеем здесь в виду, в особенности следующие три статьи:

J. Sommer, Elementare Geometrie vom Standpunkte der neueren Analysis aus, III. A. B. 8. (Зоммер, Элементарная геометрия с точки зрения современного анализа; (закончено в 1914 г).

M. Zacharias, Elementargeometrie und elementare nichtenklidische Geometrie in synthetischer Behandlung, III. A. B. 9. (Цахариас, Элементарная геометрия и элементарная неевклидова геометрия в синтетическом изложении; закончено в 1913).

G. Berkhan und W. Fr. Meyer, Neuere Dreiecksgeometrie, III, A. B. 10 (Беркган и Мейер, Новая геометрия треугольника; закончено в 1914).

Из этих трех рефератов больше других связан с традиционной элементарной геометрией реферат Цахариаса. Хотя и оба других тоже трактуют об элементарных образах, но лишь постольку, поскольку к ним применяют современные методы. Правда, такая тенденция проявляется очень сильно и у Цахариаса — так, например, он уделяет много внимания вопросам аксиоматики и неевклидовой геометрии, — но у него это происходит не столь односторонне, как у двух других авторов. Статья Зоммера затрагивает — о чем можно догадываться уже по самому ее названию — целый ряд вопросов, которые уже были обсуждены в первом томе этого сочинения. Так, Зоммер говорит о выполнимости геометрических построений, о группах вращения правильных многогранников и о том развитии идей сферической тригонометрии, которое связано с именами Гаусса, Мёбиуса, Клейна и Стюди. Реферат Беркгана-Мейера посвящен учению о замечательных точках, прямых, кругах и конических сечениях в треугольниках и имеет главной целью вскрыть с помощью понятия преобразования те связи, какие существуют между многими, повидимому, стоящими особняком предложениями такого рода.

2. Классификация геометрических задач на построение

Ограничиваясь случаем плоскости, всякую геометрическую задачу можно формулировать следующим образом: дана некоторая фигура F, состоящая из точек, прямых, кругов и других кривых плоскости $\mathfrak{E}$; имеется в этой же плоскости другая фигура F^*, точки, прямые и т. д. которой находятся в заданном отношении к элементам фигуры F. В силу традиции, а не из каких-либо серьезных дидактических соображений, в элементарной математике из кривых допускают почти исключительно окружности, в лучшем же случае еще и другие кри ые второго порядка. Так как подобная кривая определяется вполне пятью точками, окружность — тремя точками, а прямая — двумя, то всякая фигура F, коль скоро для нее имеет существенное значение лишь конечное число этих образов, определяется конечным числом точек. То же самое относится и к F^*. В таком случае задача заключается в том, чтобы определить (найти) точки фигуры F^*, зная точки фигуры F. При указанных ограничениях аналитическая формулировка проблемы приводит к конечному числу уравнений между координатами искомых и координатами данных точек. Если хоть одно из этих уравнений трансцендентно, то и сама задача называется трансцендентной, в противном случае — алгебраической. Алгебраическая задача, далее, называется линейной или первой степени, если вычисление искомых координат приводит только к уравнениям первой степени; если же при этом встречаются еще квадратные уравнения, или такие уравнения высших степеней, которые могут быть заменены рядом последовательных квадратных уравнений, то задача называется квадратичной или второй степени. Соответственный смысл имеет выражение: „задача n-ой степени".

Наряду с этим подразделением существует еще другое, восходящее к Мёбиусу[1]), согласно которому геометрические задачи подразделяются на проективные, аффинные и метрические. Задача называется проективной, если она может быть представлена аналитически системой уравнений, которая инвариантна по отношению к группе проективных преобразований. Аналогичный смысл имеют названия „аффинная задача" и „метрическая задача". Однако нет необходимости составлять систему уравнений данной задачи, чтобы узнать, к какой группе она принадлежит: это следует уже из самой словесной ее формулировки. Так, в проективных задачах речь идет все время только о проективных свойствах, а не об аффинных, какова параллельность, и не о метрических свойствах, каковыми являются длина отрезка или величина угла.

Кроме названных еще и другие группы могут, конечно, находиться в связи с задачами элементарной геометрии. Так, например, знаменитая задача Аполлония, заключающаяся в том, чтобы построить круг, который касался бы трех данных кругов, лежащих в одной плоскости, принадлежит к группе преобразований посредством обратных радиусов, поскольку мы ограничиваемся точечными преобразованиями, так как свойство „быть кругом", как и касание двух окружностей, инвариантно по отношению к этой группе. Сочетая друг с другом только что описанные виды классификаций, мы должны будем подразделять линейные задачи на проективные, аффинные, метрические и т. д. точно так же, как и на задачи квадратичные, кубичные и т. д. Отсюда ясно, что надо понимать под проективно-линейной или проективно-квадратичной задачей.

---

[1]) Baryzentrischer Kalkul, § 139 и сл.

3. О построениях, выполнимых посредством наиболее употребительных чертежных инструментов

Наиболее часто упоминаемыми механическими средствами для решения задач на построение являются:

a) линейка конечной длины с одним [рабочим] ребром (краем) и без шкалы;

b) параллельная линейка (линейка с двумя параллельными [рабочими] ребрами (или „о двух краях"), без шкалы).

c) линейка со шкалой или с двумя передвигающимися указателями, служащая для перенесения отрезков (Streckenüberträger);

d) подвижной прямой угол;

e) циркуль.

Одной из задач теории построений является определение области применимости [эффективности] отдельных инструментов или совокупности нескольких из них. Об относящихся сюда исследованиях можно прочесть в реферате Зоммера или в уже упоминавшихся (см. стр. 349) книгах Энриквеса и Адлера. Но в особенности заслуживает в этом отношении упоминания книга Валена (Th. Vahlen) „Построения и приближения" („Konstruktionen und Approximationen", Leipzig 1911). Помимо линейных, квадратичных и кубичных построений в этой книге рассматриваются также высшие алгебраические и трансцендентные задачи, и, наконец, очень подробно приближенные построения Причем всюду, даже там, где речь идет о трансцендентных задачах, автор ограничивается применением элементарных методов. Его намерением как раз и является показать всю широту их применимости. Книга Валена с ее поразительно богатым содержанием может служить для каждого учителя математики крайне обильным источником импульсов в его работе.

Приведем некоторые результаты из теории наиболее употребительных инструментов, а именно линейки, циркуля и прямого угла. С помощью одной только линейки можно решить все проективные задачи первой степени и только их. Если же хотят с помощью линейки разрешить также и проективные задачи второй степени, то приходится взять на помощь в качестве дополнительного конструктивного средства какое-нибудь наперед начерченное коническое сечение K_0. Тогда, например, квадратичная задача нахождения точек пересечения любой прямой g с любым коническим сечением K решается так: сначала переводим посредством некоторого проективного преобразования K и g в $K'=K_0$ и в g'. Это удается сделать с помощью одной только линейки. Пусть прямая g' пересекает K_0 в точках A_0 и B_0; последние являются отображением искомых точек пересечения A, B, которые можно определить опять-таки с помощью одной только линейки. Все линейные и квадратичные аффинные задачи можно разрешить с помощью одной только линейки, если известен еще центр K_0, а метрические задачи первого и второго порядка, — если, к тому же, проведены главные оси; ибо указание центра выделяет бесконечно удаленную прямую из числа всех остальных прямых на плоскости, а главные оси задают еще и обе мнимые циклические точки. Поэтому оказывается возможным выполнить все построения, при которых играет роль инвариантность этих образов, а это и есть, как раз, в первом случае аффинные и во втором — метрические построения. Так как в качестве конического сечения K_0 можно, в частности, взять окружность, то в согласии с предыдущим находится тот факт, что циркуль и линейка достаточны для решения всех задач первой и второй степени. Но, как показал впервые Маскерони (L. Mascheroni) в своей „Geometria del compasso" („Геометрия циркуля"),[1] можно обойтись и одним только циркулем. Доказательство, вскрывающее более глубокое основание этого факта, принадлежит Адлеру; суть его сводится к доказательству того, что всякое преобразование обратными радиусами может быть выполнено одним только циркулем. Всякую фигуру F, для построения которой необходимы прямые и круги, с помощью такого преобразования можно заменить фигурой F', для вычерчивания которой достаточно одних кругов. С помощью обратного преобразования можно F' перевести в F, пользуясь только циркулем. Наконец, можно, как подробнее изложено в вышеприведенных сочинениях, заменить циркуль подвижным прямым

---

[1]) Pavia 1797. Немецкое издание J. P. Gruson, Berlin 1825. [Существует и французский перевод: „Géométrie du Compas", Paris An. VI, 1798.]

углом. Поэтому теория линейных и квадратичных построений не дает никаких оснований предпочитать циркуль прямому углу в том смысле, будто только решения, полученные с помощью циркуля, могут считаться строгими. Исключительно соображение практического характера, состоящее в том, что с циркулем можно работать точнее в механическом смысле, чем с прямым углом, может быть учтено как аргумент в пользу предпочтения циркуля.

В противоположность этому по отношению к задачам третьей и четвертой степени приходится констатировать большие преимущества прямого угла перед циркулем. В то время как эти задачи невозможно решить ни с помощью одного циркуля, ни при одновременном употреблении нескольких циркулей, они допускают решение с помощью прямых углов. Докажем последнее утверждение [1]).

Аналитически задача четвертого порядка приводит к одному или нескольким алгебраическим уравнениям четвертой степени с одним неизвестным. Определение корней уравнения четвертой степени можно свести к решению уравнения третьей степени. Поэтому достаточно показать, что всякое алгебраическое уравнение третьей степени с одним неизвестным может быть геометрически решено с помощью подвижного прямого угла. Для этого достаточно обратиться к известному из теории графических методов способу Лилла (Lill) решения алгебраических уравнений. Пусть упомянутое уравнение приведено к виду $1\cdot x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3 = 0$. Выберем единицу длины и представим коэфициенты a_1, a_2, a_3 в виде отрезков. После этого начертим (рис. 150) прямоугольную ломаную $ABCDE$, у которой $AB = 1$, $BC = a_1$, $CD = a_2$ и $DE = a_3$. Направление AB произвольно, а направление других отрезков мы выбираем по следующему правилу: переходя от одного отрезка к другому, делаем поворот (на прямой угол) вправо, если изображаемые ими коэфициенты имеют одинаковые знаки, и влево, если эти знаки противоположны. Откладываем на BC отрезок $FB = x$,

[1]) Дальше по Адлеру, l. c., стр. 259 и сл. немецкого оригинала [стр. 263 и сл. русского издания 1910 г. „Матезис"].

оканчивающийся в B, считая за положительное то направление, которое получается путем поворачивания вправо от AB на прямой угол, и строим ломаную $AFGH$ с прямыми углами при F и при G, причем G лежит на DC, а H на DE. Утверждаем, что мера (длина, измеренная принятой единицей длины) HE, взятая с соответствующим знаком, равна тому значению, которое принимает функция

$$y = x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3$$

при выбранном значении x. Действительно, если за положительное направление мы будем принимать всегда направление, получаемое из AB последовательным вращением направо, то имеем:

$$FC = x + a_1,$$

$$GC = x(x + a_1) = x^2 + a_1x,$$

т. е. треугольник ABF подобен треугольнику FCG,

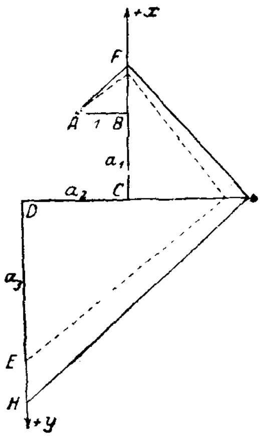

Рис. 150.

$$GD = x^2 + a_1x + a_2,$$

$$HD = x(x^2 + a_1x + a_2) = x^3 + a_1x^2 + a_2x,$$

так как треугольники GDH и ABF подобны.

Наконец, из равенства

$$HE = HD - ED = HD + DE$$

следует:

$$HE = x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3.$$

Чтобы решить уравнение, строим такие ломаные, для которых H совпадало бы с E (пунктирная ломаная на нашем чертеже), затем определяем меру и знак получаемого при этом отрезка FB. Но такую „разрешающую ломаную" можно сразу найти с помощью двух подвижных прямых углов. Этим и доказана наша теорема [1]).

К требованию ограничения конструктивных средств приходит, исходя из геометрических соображений, Стюди (E. Study) в работе об упомянутой выше задаче Аполлония о касании („Math. Ann.", Bd. 49, 1897). Мы уже отметили, что эта задача принадлежит к группе преобразований обратными радиусами. Допуская только взаимно однозначные точечные преобразования пространства, обозначим через G наибольшую группу, которая переводит соприкасающиеся круги снова в соприкасающиеся. По отношению к G проблеме Аполлония эквивалентна такая задача: даны три окружности K'_1, K'_2, K'_3 на сфере K'. Требуется найти те круги на этой сфере, которые касаются K'_1, K'_2, K'_3. Действительно, для трех окружностей K_1, K_2, K_3 плоскости K и для касающихся их кругов K' всегда можно подыскать такое преобразование, принадлежащее G, которое переводит круги без штрихов в круги со штрихами. Плоскости K соответствует при этом сфера K'. Требование Стюди состоит в том, чтобы найти такое решение плоской проблемы, которое можно было бы, шаг за шагом, перенести на равносильную ей пространственную проблему. В таком случае могут быть использованы, естественно, только такие средства построений, которые инвариантны по отношению к G. Проведение прямых, т. е. употребление линейки, при этом исключается, как и употребление циркуля, так как центр круга не связан с ним инвариантным по отношению к группе G образом; центр данного круга не переходит в центр преобразованного круга. Но зато позволительно применять инструменты, с помощью которых можно провести окружность через данные три точки A, B, C, так как после преобразования подобная окружность перейдет в другую окружность, проходящую через соответствующие точки A', B', C'. В качестве такого инструмента можно было бы предложить угол, раствор которого

---

[1]) Применимость метода Лилла к алгебраическим уравнениям любой степени очевидна. Подробности можно найти у v. Sanden, Praktische Analysis, 2. Aufl. Leipzig 1923 [Ср. также Рунге, Графические методы математических вычислений, стр. 19 и сл.].

можно фиксировать по желанию. Сперва его нужно было бы установить так, чтобы его вершина совпала, например, с точкой C, а стороны проходили через A и B. Потом нужно было бы перемещать C так, чтобы A и B все время оставались на сторонах угла. Тогда точка C, согласно теореме о вписанных углах, описала бы искомую окружность. Но этот инструмент можно употреблять только в том случае, если имеется часть плоскости, содержащей окружность. Для пространственных же построений, как, например, на сфере, он непригоден. От этого недостатка свободна гибкая круговая линейка (Kreislineal) П. Чебышева. Она состоит из длинной очень эластичной стальной полоски, задняя сторона которой имеет цепь соединенных между собой звеньев. Если весь прибор согнуть, то звенья цепи образуют правильный многоугольник, который касается прилегающей к нему полосы. Описание этой линейки, которая первоначально была придумана для черчения дуг окружностей с очень малой кривизной, имеется в одной работе Гельмерта (F. Helmert) [1]).

Мы упомянули об этом инструменте, чтобы показать, как чисто теоретические требования при известных обстоятельствах наводят на мысль о совсем иных инструментах, чем циркуль и линейка. Если применить требование Стюди к проективной, аффинной и метрической группам, то окажется, что инвариантным чертежным инструментом по отношению к метрической группе является линейка, циркуль с фиксированным раствором, прямой угол и вообще всякое твердое подвижное тело, а для аффинной и проективной группы из всех выше названных инструментов одна только линейка. И здесь снова циркуль никоим образом не имеет преимущества перед прямым углом. Итак, резюмируя, можно сказать, что нет каких-либо основательных причин ограничиваться при построениях линейкой и циркулем, исключая, следовательно, подвижный прямой угол. Практика черчения тоже не дает для этого никаких оснований, так как

---

[1]) „Zeitschrift für Vermessungswesen“, т. VI, стр. 147 и сл., 1877. Вопрос о том, является ли круговая линейка **практически** пригодной для построений на сфере, остается открытым.

она требует как раз возможно большей свободы в употреблении инструментов.

Имеется множество других инструментов для построения кривых высших порядков, которые в теории все правильны, но практически страдают от всевозможных источников ошибок. В теории графических методов мы встречаем наряду со старыми средствами построений чрезвычайно широкое использование трансцендентных кривых и всевозможных преобразований. Также и для различных сортов координатной бумаги, которая при этом применяется, следовало бы указать область их конструктивной применимости. О богатстве номографических методов можно прочесть в обзоре Люкея (P. Luckey) „Анаморфоза и номографический порядок“ (Die Verstreckung (Anamorphose) und die nomographische Ordnung) в 4 томе (1924) журнала „Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik“. Нематематическими инструментами в общем и целом являются так называемые лекала техников, т. е. ограниченные случайными контурами плоские листы, причем чертежник всегда использует ту часть их контура, которая представляет, повидимому, наиболее подходящее для его целей решение.

4. О применении преобразований для упрощения геометрических задач

Один из методов решения геометрических задач, ведущих часто к цели, состоит в том, что данную задачу с помощью соответствующего преобразования сводят к более простой и, решив последнюю с помощью обратного преобразования, возвращаются снова к первоначальной задаче. Разумеется, преобразование не должно изменять существенных для задачи свойств фигуры. В изложениях предназначенных для школы наряду с главной группой особенно часто применяют группу преобразований обратными радиусами. Очень изящное собрание примеров этого рода представляет томик Кэрста (B. Kerst) из Математико-физической библиотеки [1].

---

[1] Kerst, Methoden zur Lösung geometrischer Aufgabe (Методы решения г ометрических задач) Leipzig 1916. [Библиотечка, которую имеет в виду Клейн, рассчитана на учащихся средней школы, выходит под общей редакцией Лицмана и Виттинга.]

Напротив, аффинные и проективные группы применяются преимущественно в книгах по начертательной геометрии. В школьном преподавании мало обращают внимания или во всяком случае не в достаточной степени подчеркивают преобразования расширения [всестороннего увеличения размеров] (Dilatation). Оно применяется в некоторых решениях Аполлониевой задачи о касании и в совершенно элементарной задаче о проведении общих касательных к двум кругам. Чтобы правильно его понять, необходимо ввести понятия об „ориентированной окружности" и „ориентированной прямой". Ориентированной окружностью, или циклом

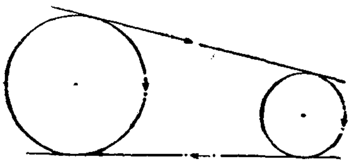

Рис. 151.

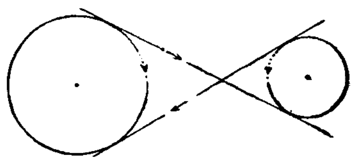

Рис. 152.

называют окружность с определенным направлением обхода. Ее радиус считают положительным, если обход совершается против часовой стрелки, в противном случае — отрицательным. Каждая окружность является носительницей двух циклов. Ориентированная прямая, называемая также пикой (Speer), представляет собой неограниченную прямую с определенным направлением движения вдоль нее. Каждая прямая является носительницей двух пик. Ориентированную окружность можно представить себе как огибающую семейства пик. Две одинаково ориентированные окружности, из которых ни одна не лежит [целиком] внутри другой, имеют общими внешними касательными только две пики (рис. 151). Две противоположно ориентированные окружности, которые не пересекаются и лежат одна вне другой имеют только две пики общими внутренними касательными (рис. 152). При взгляде на прилагаемые чертежи тотчас приходят в голову соединенные ремнями шкивы, которые вращаются в одну и ту же сторону, если ремни изображают внешние касательные, и в противоположные стороны, если ремни перекрещиваются, т. е. образуют внутренние касательные. Под направлением, перпендикулярным к какой-нибудь пике, мы будем понимать направление той пики, в которую перейдет данная пика, если ее повернуть против часовой стрелки на $\frac{\pi}{2}$ вокруг какой-либо ее точки.

Мы определим теперь „расширение" (Dilatation), как такое преобразование касания (Berührungstransformation), при котором все пики перемещаются параллельно самим себе в нормальном к ним направлении на одно и то же расстояние a. Ясно, что это преобразование переводит ориентированную окружность радиуса r в концентрическую с нею окружность радиуса $r-a$; новая окружность имеет одинаковое с первою или противоположное ей направление обхода, смотря по тому, имеют ли $r-a$ и r одинаковые или противоположные знаки. Те два цикла, на которые распадается [всякая] окружность, раздваиваются: один из них стягивается, а другой растягивается. Если радиус какого-нибудь цикла увеличивается на величину расширения a, то радиусы всех одинаково с ним ориентированных циклов тоже увеличиваются на ту же величину a, тогда как радиусы противоположно ориентированных циклов уменьшаются на ту же величину. Далее, сохраняется соприкосновение между двумя циклами или между циклом и пикой, если на общем обеим фигурам линейном элементе они определяют одинаковое направление движения. Что расширения образуют группу, это непосредственно ясно. После этих подготовительных замечаний, задача о проведении общих внешних касательных к двум окружностям с радиусами r_1 и r_2 представляется в следующем виде (рис. 153). Приписываем обеим окружностям положительное направление обхода, подвергаем их расширению, величина которого равна радиусу r_1 меньшего круга и которое заставляет обе окружности стянуться. Меньшая из двух окружностей

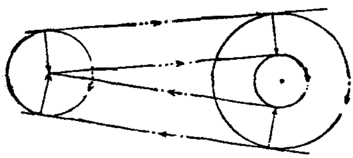

Рис. 153.

превращается в свой центр, а большая, сохраняя свой центр, переходит в окружность радиуса $r_2 - r_1$. Этим первоначальная задача сводится к более простой: провести касательные к окружности из данной точки. Если она решена, то новое расширение, обратное первому, приводит к цели. Если же надо построить внутренние касательные к двум окружностям, то приписываем им противоположные направления обхода и подвергаем их такому расширению, при котором меньшая окружность превращается в свой центр. Бóльшая превращается при этом в окружность с радиусом $r_1 + r_2$, если r_1, r_2 обозначают абсолютные величины радиусов (рис. 154).

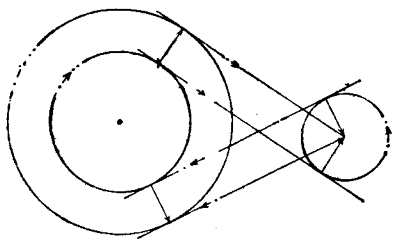

Рис. 154.

Чертеж, дающий решение задачи Аполлония, тоже принадлежит к группе расширений, если заменить входящие в него окружности их циклами. Это не стоит в противоречии с нашим прежним замечанием, согласно которому группа преобразований обратными радиусами является наибольшей [т. е. самой обширной], которая переводит соприкасающиеся окружности опять в соприкасающиеся же окружности. А именно, говоря это, мы ограничивались взаимно однозначными точечными преобразованиями. Расширение же не является взаимно однозначным точечным преобразованием, так как при нем точке соответствует окружность; оно скорее является взаимно однозначным преобразованием направленных линейных элементов. Посредством соответствующего расширения можно задачу Аполлония свести к такой более простой: построить все окружности, которые касались бы двух данных кругов и проходили через данную точку.

5. Новейшая литература по вопросу о проведении эрлангенской программы

С точки зрения теории групп преобразований, то, что обычно относят к элементарной геометрии, представляет пеструю смесь, составленную из отдельных частей очень различных геометрий. Наряду с главной группой мы встречаем там, например, группы аффинных и проективных преобразований, инверсий и расширений. При этом очень отчетливо выступают отчасти некоторые подгруппы только что названных групп. Так, наряду с группами параллельных сдвигов и вращений вокруг точки, фигурирует подгруппа аффинных преобразований, сохраняющих площади, которая охватывает теорию равенства площадей плоских многоугольников с соответствующими теоремами, в том числе теоремами о дополнительных параллелограмах и о равенстве площадей треугольников с равными основаниями и высотами. Одно из требований эрлангенской программы состоит в том, чтобы отделить друг от друга эти разнородные составные части элементарной геометрии и развивать каждую саму по себе. По отношению к аффинной группе уже Мёбиус [1]) формулирует эту цель, после того как он перечислил некоторые основные положения аффинной геометрии, в следующих ясных словах: „Нельзя было бы назвать нецелесообразной попытку, исходя из этих простых предложений как основных положений, по возможности полно вывести общие свойства, которые хотя и встречаются в геометрических сочинениях в большом количестве, но перемешаны там с другими, более специальными свойствами и часто доказываются посредством чуждых вспомогательных средств как тригонометрические формулы и т. п., систематически их упорядочить и, таким образом, возвести собственное отдельное геометрическое здание без меры углов и Magister Matheseos [2]). Самостоятельное в этом смысле развитие аффинной геометрии находим в курсе аналитической геометрии Гефтера (L. Heffter) и Кёлера (C. Köhler) [3]). В. Блашке (W. Blaschke) и другие создали в последнее время аффинную, а именно, преимущественно сохраняющую площади диференциальную геометрию. Связное изложение этих исследований содержится во втором томе диференциальной геометрии Блашке [4]).

---

[1]) Möbius, Gesammelte Werke, Bd. 1, стр. 392 и сл.

[2]) Имеется в виду теорема Пифагора.

[3]) Bd. 1, Leipzig 1905; Bd. 11, 1923.

[4]) Vorlesungen über Differentialgeometrie, Bd. 1, 2. Aufl., Berlin 1924 Bd. 11, 1923.

Задача разъяснения „неоднородной“ массы элементарной геометрии с точек зрения, развитых в эрлангенской программе, проводится в книге Бека (H. Beck) „Koordinatengeometrie“ [1]. Мы хотели бы обратить ваше особенное внимание на эту ценную, богатую новыми мыслями книгу, которая возникла на почве исследований Стюди и его учеников. Новейшие обобщения всего плана, предложенного в эрлангенской программе, выходят за пределы границ тех теорий, которые трактуются в этой книге.

6. К начертательной геометрии

Имеется большое количество новых сочинений по начертательной геометрии. Отметим среди них курсы Э. Мюллера (E. Müller) [2] и Г. Шефферса (G. Scheffers) [3]. Бесспорным является значение начертательной геометрии для техники и в педагогическом отношении для развития геометрической интуиции. Но многие математики считают ее наукой закостеневшей, они видят в ней дисциплину, которая перестала ставить перед исследователем проблемы, которая достигла конца своего развития. Хотя в течение некоторого времени и могло казаться, что подобный взгляд верен, то теперь, в особенности, благодаря работам итальянских и австрийских геометров, его следует оспаривать. В Австрии — это только что названный Э. Мюллер, преподающий в Венской высшей технической школе, который при поддержке многочисленных учеников пошел по новым путям в начертательной геометрии. Подробный отчет об этом дает Э. Круппа (E. Kruppa) в четвертом томе (1924) журнала „Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik“. Цель книги „Линейные отображения“ („Die linealen Abbildungen“), которую издали совместно Мюллер и Круппа, как раз и заключается в том, чтобы вскрыть наиболее общие принципы, под которые можно подвести методы начертательной геометрии, рассматривая их с возможно более высоких геометрических точек зрения.

---

[1] Berlin 1919.

[2] 2 тома, 2-е и 3-е изд., Leipzig 1920.

[3] 2 тома. Berlin 1919 и 1920.

7. Правило Непера и Pentagramma mirificum

Правило Непера служит, как известно, для решения прямоугольных сферических треугольников эйлерова типа (т. е. сферических треугольников в элементарном понимании; см. т. I стр. 263 (288). Оно формулируется так: представим себе пять отличных от $\frac{\pi}{2}$ элементов прямоугольного сферического треугольника выписанными в виде цикла (т. е. по кругу) в порядке, соответствующем их естественному расположению [в треугольнике], заменяя при этом катеты их дополнениями $\left[\text{до } \frac{\pi}{2}\right]$ (рис. 155); тогда, во-первых, косинус какого-либо элемента равен произведению синусов не соседних с ним элементов, и, во-вторых, он равен произведению котангенсов прилегающих в нему [соседних с ним] элементов.

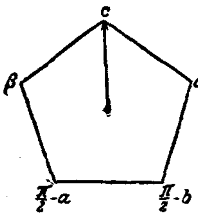

Рис. 155.

Рис. 155 соответствует треугольнику ABC, у которого угол C прямой. Пять элементов $c, \beta, \frac{\pi}{2}-a, \frac{\pi}{2}-b, \alpha$, которые Непер назвал „циркулярными“ (или круговыми), написаны у углов правильного пятиугольника в том порядке, который получится, если обойти треугольник в направлении, противоположном движению часовой стрелки. Рис. 155 тоже надо обходить против часовой стрелки; гипотенуза c отмечена указателем (стрелкой), проведенным из центра пятиугольника. При обычном преподавании правило Непера является просто мнемоническим правилом. Не приходит даже в голову спросить себя, не является ли оно выражением некоторой геометрической закономерности. После того как выведены 10 формул, относящихся к прямоугольному сферическому треугольнику, это правило просто заучивается для более легкого усвоения этой группы формул. Такой способ изложения проходит мимо изящных и легко понятных соображений Непера, оставляя их без внимания. В своей книге «Mirifici Logarithmorum Canonis Descriptio“ [„Описание чудесного канона (правила) логарифмов“], 1619 (кн. 11, гл. IV, стр. 30 и сл.) Непер получает свое правило из следующей фигуры.

Пусть ABC будет снова сферический треугольник с прямым углом при C. (Ср. рис. 156, который должен изображать стереографическую проекцию фигуры). Обозначим большие круги, на которых лежат катеты BC и CA, через k_1 и k_2, а большой круг гипотенузы AB по причине, которая сейчас выяснится, через k_4. Построим теперь два больших круга, для которых концы гипотенузы являются полюсами, обозначая круг, принадлежащий A, через k_3, а принадлежащий B — через k_5. Тогда круги k_1 и k_2 пересекутся в C, круги k_2 и k_3 в F, k_3 и k_4 в K, k_4 и k_5 в D, k_5 и k_1 в H — все под прямыми углами. Таким образом получится замкнутая сама в себе цепь из пяти прямоугольных треугольников [пятиугольников CAB, DEA,... нашего рисунка], прямые углы которых лежат при точках C, D, F, H и K, а гипотенузы образуют пятиугольник $AEGJB$.

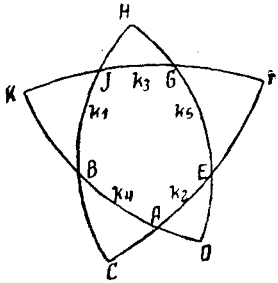

Рис. 156.

Благодаря своим замечательным свойствам этот пятиугольник и назван „Pentagramma mirificum“ (чудесная пентаграмма, т. е. пятиугольная звезда); в частности, она привлекала к себе многократно внимание Гаусса[1]).

Легко видеть что все вершины углов названного пятиугольника являются полюсами больших кругов $k_1, \ldots, k_5$, а именно в силу самого построения A есть полюс k_3, B — полюс k_5; кроме того, E как точка пересечения двух кругов k_5 и k_2, образующих с k_1 прямой угол, будет полюсом k_1; точно так же G есть полюс k_4. а J — полюс k_2. Отсюда следует, что все стороны BD, CE, AF, DG, EH, FJ, GK, HB, JC, KA равны $\frac{\pi}{2}$ каждая. Поэтому треугольник ADE можно построить из ABC, продолжая гипотенузу BA и катет CA последнего на величину их дополнений до $\frac{\pi}{2}$. Последовательно применяя этот

[1]) Ср. в Gauss, Gesammelte Werke, Bd. VIII, стр. 112 и сл., Göttingen 1900, замечания Фрикке (Fricke) к 11 отрывкам, относящимся к пентраграмме.

прием, можно из исходного треугольника получить всю цепь треугольников.

Вернемся опять к циклическому расположению циркулярных элементов треугольника ABC на рис. 155. Вычислим теперь циркулярные элементы треугольника ADE из соответствующих элементов треугольника ABC. Имеем:

$$\frac{\pi}{2} - AD = \frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{2} - c\right) = c;$$

$$\sphericalangle DAE = \alpha; \quad AE = \frac{\pi}{2} - b.$$

Далее (представляем себе ED продолженным за точку D до пересечения с BC по ту сторону C):

$$\sphericalangle AED = \frac{\pi}{2} - a;$$

$$\frac{\pi}{2} - DE = \frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) = \beta.$$

Если мы выпишем циркулярные элементы треугольника ADE аналогично тому, как мы поступили с ABC, то мы снова получим с точностью до положения указателя (стрелки) гипотенузы фигуру рис. 155. Последовательность и величина циркулярных элементов при этом не изменилась, только их значение (смысл) стало другим. Принимая во вниминие то, что каждый из треугольников, следующих за треугольником ADE, стоит в таком же отношении к своему предыдущему, как ADE к ABC, можем высказать теорему: фигура рис. 155 инвариантна, если не принимать во внимание положения указателя гипотенузы, по отношению к группе операций, которые переводят какой-либо из треугольников цепи, изображенной на рис. 156, в другой треугольник той же самой цепи.

Получением такой простой связи мы обязаны существенным образом тому обстоятельству, что циркулярными элементами выбраны дополнения катетов, а не сами катеты[1]). Отметим еще раз, что все треугольники должно обходить в одинаковом направле-

[1]) Можно так же, как делает сам Непер, взять за циркулярные элементы катеты и дополнения гипотенузы и прилежащих к ней углов.

нии. Наконец, принимая во внимание значение элементов, констатируем, что указатель гипотенузы на рис. 155 поворачивается в положительном направлении на $3\cdot\frac{\pi}{2}$ при переходе от ABC к ADE (рис. 157); то же самое будет при переходе от ADE к EFG. Поэтому, если двигаться вдоль цепи треугольников, то каждый из циркулярных элементов ABC будет один раз гипотенузой, два раза дополнением катета и два раза острым углом. Пятью сторонами Pentagramma mirificum служат — правда, в измененном порядке — пять циркулярных элементов. Если мы вывели для ABC формулу

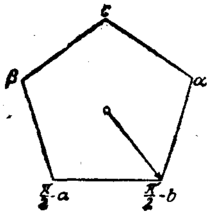

Рис. 157.

$$\cos c = \sin\left(\frac{\pi}{2} - a\right)\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2} - b\right),$$

то в силу изложенного все пять формул выражаются этой одной, так как свойство быть гипотенузой или катетом оказывается случайным и только соотношения расположения (порядка) являются существенными. То же относится к формуле

$$\cos c - \operatorname{ctg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\beta,$$

которая получается исключением из некоторых из пяти предыдущих формул. Если рассматривать буквы на рис. 155 как неподвижные, а пятиугольник как вращающийся вокруг своего центра вместе с указателем гипотенузы как одно целое, то можно рассматривать группу операций, которые преобразуют один из треугольников нашей цепи в другой в виде группы вращений, при которых пятиугольник переходит сам в себя.

Мы не придерживались строго изложения Непера. Но один момент в изложении Непера кажется нам особенно достойным внимания, и поэтому мы не должны пройти мимо него. Мы имеем в виду тот способ, каким Непер отыскивает свою фигуру на небе. Он исходит с этой целью из треугольника — полюс, точка севера и заходящее Солнце, — который прямоуголен при точке севера [так как точка севера есть пересечение большого круга, проходящего через зенит и полюс, с горизонтом]. Если на рис. 155 B означает полюс, C — точку севера, A — место заходящего Солнца, то большим кругом k_1 будет служить меридиан места, кругом k_2 — горизонт, k_4 — меридиан Солнца, k_5 — небесный экватор, k_3 — большой круг, полюсом которого является Солнце и который для краткости назовем „сопутствующим кругом" (Begleitkreis) Солнца. Тогда Pentagramma mirificum будет иметь своими угловыми точками: заходящее Солнце, точку запада, точку пересечения небесного экватора с сопутствующим кругом Солнца, зенит и полюс. Наш рисунок предполагает при этом, что Солнце имеет северное склонение.

ДОБАВЛЕНИЕ II

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ О ПРЕПОДАВАНИИ ГЕОМЕТРИИ В ОТДЕЛЬНЫХ СТРАНАХ

Заключительная глава, посвященная преподаванию геометрии, была написана около 1908 г., как раз перед началом работ „Интернациональной комиссии по преподаванию математики", сокращенно называемой Imuk [1]). После того, как с началом войны прекратились фактически работы этой комиссии, почти во всех культурных странах произошли глубокие преобразования в учебном деле. Казалось бы, из этого следует заключить, что все материалы Интернациональной комиссии должны быть оставлены в стороне как устаревшие. Однако мы придерживаемся того убеждения, что в большинстве отчетов Imuk слишком богато идеями, которые имеют непреходящее значение, чтобы можно было хотя бы в отдаленнейшей степени согласиться с таким мнением.

Очень трудно, особенно в отношении иностранных государств, изобразить все, происшедшее в области преподавания за время после работ Imuk. Нелегко раздобыть достаточные материалы для надежного суждения о новых

[1]) [Слово „Imuk" образовано из первых букв слов в немецком названии комиссии: Internationale Mathematische Unterrichts-Kommission.]

движениях в различных странах, хотя бы уже потому, что многое все еще находится в состоянии изменения. Поэтому мы в последующем ограничимся сообщением отдельных фактов, которые нам кажутся существенными, знанием которых мы обязаны или Imuk, или случаю.

Однако отметим сразу же одну типичную черту в новейшем развитии этих вещей. Она состоит в том, что широкие круги теперь много ниже ценят математику и естественные науки по сравнению с родным языком, литературой, историей и искусством в смысле образовательного элемента вообще. Правда, с точки зрения современной ситуации можно было бы ожидать как раз противоположного, так как с указанными отраслями науки неразрывно связана техника, колоссальное значение которой для жизни народов — для обороны страны во время войны, для благосостояния во время мира, которое впервые делает возможной любую культурную работу — никогда не проникало так настойчиво в сознание людей, как в наше время. Но возможно, что те грандиозные размеры, в которых происходило и теперь еще происходит вторжение техники по сравнению с душевною силою и способностью восприятия большинства людей дали для большинства слишком много технического элемента и привели к пресыщению. Таким образом движение, враждебное математике и естественным наукам, которое проявляется во всех странах, принимавших участие в войне, может быть объяснено, по крайней мере частично, как явление утомления.

Во Франции это настроение привело в 1923 г. к реформе министра просвещения Берара (Berard), который ввел для первых четырех лет обучения во всех средних учебных заведениях латынь, как обязательный предмет, желая этим уничтожить школы чисто реального типа. С этой реформой особенно боролись депутаты палаты Эррио (Herriot), Пенлевэ (Painlevé) и Лейг (Leygnes). Пенлевэ, известный французский математик, а Лейг — министр, проведший реформу преподавания 1902 г. Эррио, когда он стал премьер-министром, восстановил по существу старое положение вещей, признающее среднюю школу без латыни равноправно с другими типами школы. Очень печальным кажется нам положение преподавания математики и особенно естественных наук в итальянских школах. Там, согласно плану, осуществленному приказом фашистского министра Джентиле (Gentile), имеется ряд типов школ, в которых при малом количестве математики естественные науки вообще не преподаются. О недостаточном внимании, которое оказала нашим специальностям прусская школьная реформа, мы говорили уже раньше (см. т. I, стр. 401). Повидимому, совсем другого мнения чем то, какое одержало верх при составлении прусской школьной реформы, придерживается в этом отношении государственный канцлер Лютер (Luther). Его речь на открытии Немецкого музея в Мюнхене была неограниченным, основанным на сильном внутреннем убеждении признанием значения и достоинства технической работы.

В России указанные специальности пользуются чрезвычайно высокой оценкой, правда, лишь постольку, поскольку они стоят явным образом в тесной связи с вопросами практической жизни. Об этом, а также о выше названных реформах можно найти кое-что в издании, выпущенном нашим имперским министерством внутренних дел под названием „Европейские реформы преподавания послевоенного периода“ [1]). Относительно отмененной теперь французской реформы преподавания 1923 г. имеем отчет самого Берара о прениях, какие имели место во французской палате депутатов в связи с его предложениями [2]).

Постановления, касающиеся итальянской реформы, собраны в одном томе, изданном Итальянским министерством просвещения в 1924 г. под названием „Собрание правил и уставов, касающихся организации преподавания в средней школе [3]). В нижеследующих замечаниях по вопросам преподавания мы органичимся, как и в нашей заключительной главе, Англией, Францией, Италией и Германией.

Начнем с обсуждения английских школьных отношений.

---

[1]) „Europäische Unterrichtsreformen seit dem Weltkriege“, bearbeitet im Reichsministerium des Innern, Leipzig 1924.

[2]) Leon Bérard, Pour la réforme classique de l'enseignement Secondaire, Paris 1923.

[3]) „Raccolta di Norme e Regolamentari sull'Ordinamento dell'Istruzione Media“, Roma 1924.

1. Англия

По вопросу о школьном деле в Англии мы имеем работы английской подкомиссии Imuk, которые изданы в двух томах под названием „Преподавание математики в Соединенном королевстве“[1]), а также один немецкий отчет Imuk, составленный Г. Вольфом (G. Wolff)[2]). Из последнего мы заимствуем прежде всего факт большой сложности и запутанности в организации английского школьного дела. „Мне рассказывали — очень характерно замечает Вольф на стр. 24 своего отчета — о том, как инспектора должны были обревизовать какую-то школу. Директор и учителя должны были представить инспекции точный отчет об организации школы и о распределении в ней учебного материала. Несмотря на это, инспектора едва могли ориентироваться и только на третий день дело начало проясняться“. Почти полная независимость отдельных школ от центральной правительственной власти позволяет в незнакомых нам размерах приспособлять их организацию к индивидуальным потребностям учеников. Так, многие средние школы наряду с общим первым концентром имеют по нескольку отделений (уклонов) во втором концентре. В качестве таких отделений встречаем обычно „классическое“, отделение (the classical side) с латынью и греческим, „современное“ отделение (the modern side) с французским и немецким и научное отделение (the science side) с упором на математику и естествознание. Возможность перехода от одного уклона к другому облегчается особыми мероприятиями. Если есть параллельные классы, то часто проводится обособление более одаренных. Кроме того, более одаренным предоставлена возможность, путем переводов каждые полгода или даже каждую треть года,

---

[1]) Вот точное название: Board of Education — Special Reports on Educational Subjects, Volume 26 and 27, The Teaching of Mathematics in the United Kingdom. Being a series of Papers prepared for the International Commission on the Teaching of Mathematics. Part I and Part II. London, published by his Majesty's stationary Office 1912. [Можно выписать через Wyman and Sones.]

[2]) G. Wolff, Der mathematische Unterricht der höheren Knabenschulen Englands, Berichte und Mitteilungen, veranlasst durch die Internationale Mathematische Unterrichts-Kommission, Zweite Folge, II, Leipzig 1915.

продвигаться вперед быстрее других. При переводах не обязательно продвижение из класса в класс по всем предметам одновременно. Так, ученик может на уроках математики сидеть в другом классе, чем на уроках языков. Таким образом та свобода передвижения, требование которой теперь часто выставляют для наших средних школ, в Англии уже давно царит неограниченно. Однако этой свободе в организации противостоит большое внутреннее отсутствие свободы в способах ведения преподавания, которое коренится главным образом в двух фактах, а именно: в централизации экзаменов, о которой мы уже говорили, и в недостаточной научной и педагогической подготовленности большого процента учителей, преподающих в средних школах Англии.

В связи с изложенным находится то обстоятельство, что движение в пользу реформы преподавания математики в Англии делает лишь очень медленные успехи. Все еще, в общем и целом, Евклид остается стандартным руководством (Standard work) при преподавании геометрии. Особенно резко дает себя знать влияние Евклида в оценке значения стереометрии, Евклид уделил ей мало внимания, и на подобном же положении падчерицы находится она вследствие этого при преподавании в большинстве английских школ.

Из числа англичан, играющих роль в современной истории преподавания математики, мы выделили на стр. 355 и 359. Перри и Бранфорда. Радикальная программа Перри встретила со стороны многих из его соотечественников сильное и, как мы уже и сами подчеркивали, в значительной части вполне обоснованное противодействие. О сколько-нибудь полном проведении его предложений, поскольку они касаются средней школы, едва ли теперь еще кто-либо серьезно думает. Однако выступление Перри имело то весьма ценное последствие, что широкие круги учителей убедились в необходимости предпосылать дедуктивному преподаванию геометрии экспериментальный пропедевтический курс.

По мнению Вольфа, влияние Бранфорда было невелико. Тем не менее именно в нем мы видим методиста самого первого ранга. На почве его идей вырос один учебник, на котором стоит остановиться подробнее, а именно, „Школьный курс математики" Давида Майра (David Mauyr)[1]) Этот автор выступает сторонником того способа преподавания, который в настоящее время имеют в виду, когда говорят о рабочем или трудовом преподавании. Оно характеризуется такими признаками: исходный пункт преподавания образуют искусно подобранные задачи. Решение этих задач должно происходить путем дискуссии между учениками и учителем при минимальном руководстве со стороны последнего. Чем больших результатов достигают сами ученики без помощи учителя при решении поставленных проблем, тем надежнее, как правильно утверждает Майр, овладевают ученики полученными знаниями, тем ценнее духовное развитие приобретенное ими в процессе обучения. Но чтобы ученики были способны к самостоятельным математическим рассуждениям, они должны обладать известным запасом конкретных математических сведений. Если ученики размышляют слишком медленно, то полезно, как полагает, далее, Майр, увеличить этот запас знаний упражнениями в черчении и измерении, следовательно, продолжать далее курс главным образом по экспериментальному способу и только тогда возвратиться к продумыванию результатов, добытых из опыта „To repeat the words of anothers reasoning is not to reason" (стр. 11) [Повторять слова чужих рассуждений не значит россуждать]. При случае рекомендуется, при более трудных проблемах, обращать особое внимание на быстроту, с которой подвигается вперед преподавание, так как метод наиболее пригодный как для практических, так и для формальных целей преподавания, а именно, метод совершения открытий самими учащимися возможен только при медленном движении вперед, если же движение будет быстрее, то преподавание можно вести лишь догматически. Еще большая поспешность может сбить с толку ученика и даже повредить его здоровью. Далее, Майр обращает особенное внимание на то, чтобы требовать от ученика тех доказательств, необходимости которых он не способен понять, так как подобный метод должен уничтожать в юном уме всякое понимание сущно-

---

[1]) „A School Course of Mathematics", Oxford. At the Clarendon Press, 1907.

сти и цели математического доказательства. Он предостерегает от того, чтобы указывать ученикам на логические трудности, которых они не чувствуют сами.

При подобном преподавании особенно важное значение имеет правильный выбор проблем. При этом нужно — подчеркивает Майр — заботиться о том, чтобы этот интенсивный метод не слишком суживал широту теоретических и практических знаний, получаемых от обучения. Майр, книга которого написана для тех годов обучения, которые соответствуют нашей низшей и средней ступени, исходит всегда из таких проблем практической жизни, правильное трактование которых имеет достаточно большое значение для умственного развития. Он аргументирует так (ср. предисловие): о ценности проблемы можно судить с двух точек зрения, во-первых, по ценности тех знаний, какие дает ее решение, и, во-вторых, по тому воспитательному значению, которое связано с выработкой решения. Первая ценность проблемы (определяемая суммой приобретаемых знаний) тем больше, чем теснее проблема связана с человеческой жизнью и ее интересами, и тем меньше, чем дальше она от этой жизни. По психологическим причинам преподавание только в том случае содействует умственному развитию, если оно идет от конкретного к абстрактному. Но такой путь наилучше осуществим в сочетании с объектами конкретных человеческих интересов.

Назовем некоторые из проблем, которые Майр предлагает в своей книге и трактовку которых он излагает в том виде, в каком она получилась в процессе свободной дискуссии с его учениками.

1. Ребенок устраивает в саду тайник для сокровищ и прикрывает его так, что его нельзя распознать среди окружающих предметов. Какими измерениями он может фиксировать положение тайника так, чтобы он сам опять мог бы его найти?

2. Определить место стула на полу.

3. Скопировать данную географическую карту.

4. Глава, в конце которой рассматривается бином Ньютона, начинается с азбуки Морзе и с возникающих в связи с этим простых вопросов, которые относятся к комбинаторике.

5. Вычисление со степенями и счетная линейка появляются в связи с вопросом, как могут быть сокращены определенные, уже раньше встречавшиеся вычисления.

Книга Майра написана, как мы уже сказали, для низшей и средней ступени. Повидимому, по ней мало где учат. Что же касается преподавания на высшей ступени английских школ, то трудно привести относительно них данные общего характера. Ценные указания и предложения, которые относятся к этому преподаванию, можно найти в таких работах Imuk: „The Educational Value of Geometry" („Воспитательное значение геометрии") и „A. School Caurse in Advanced Geometry" („Школьный курс геометрии для высшей ступени"); первая из них принадлежит известному дидактику Кэрзону (G. Carson), а вторая Дюреллу (C. V. Durell). Некоторые главные мысли предложений Дюрелля, о которых мы, однако, не знаем, насколько с ними считаются в английских школах, состоят в том, чтобы ввести при преподавании следующие разделы: мнимые элементы в геометрии, один простой способ применения однородных координат для вычисления значения несобственных элементов, вычислительная и наглядная реализация следующих преобразований:

$$x = cx', \qquad y = y'$$

$$x = \frac{px'}{y' + p}, \qquad y = \frac{qy'}{y' + p}.$$

С помощью первого преобразования можно превратить в окружность $x^2 + y^2 = r^2$ эллипс $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, если константа c — действительна и выбрана соответствующим образом, и гиперболу $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, если c — мнимое число. Таким образом можно целый ряд теорем, относящихся к окружности, перенести на эллипс и гиперболу. Второе преобразование — очень простой случай проективного и может найти подобное предыдущему применение. Дюрелл того мнения, что изучение ортогональной и центральной проекции очень сильно упрощается, если допустить, хотя бы в скромных размерах, аналитические вычисления, а не застывать на пуристской точке зрения, которая допускает только чисто геометрические доказательства.

2. Франция

Мы уже констатировали строго централистическую организацию в качестве признака, которым резко отличается французская постановка школьного дела от английской. Система современного среднего образования во Франции такова. После того как ученик прошел курс двух „подготовительных“ классов (Classes prèparatoires) и двух „начальных“ классов (Classes élementaires), он, в возрасте примерно 10—11 лет вступает в среднюю школу. Последняя делится на 3 „цикла“ (Cycles), из которых первый обнимает 4 года, второй 2 года и третий 1 год. В первом цикле ученики могут выбирать между двумя „отделениями“ (Sections) A и B. В отделении A с первого же года изучается латинский, а с четвертого — греческий, как обязательные предметы. В отделении B древние языки заменяются более глубоким изучением математики, естествознания и черчения. Программы обоих отделений построены таким образом, что ученики по окончании первого цикла обладают знаниями, которые представляют нечто целое и могут оказаться для них достаточными. Во втором цикле имеются четыре отделения A, B, C, D, которые могут быть охарактеризованы такими предметами: A: латинский — греческий; B: латинский — новые языки; C: латинский — математика — естествознание; D: математика — естествознание — новые языки. В конце второго цикла ученик держит экзамен на получение первой степени звания баккалавра, к получению второй степени которого подготовляет третий цикл, состоящий только из одного класса. Здесь ученикам предоставлен выбор между Classe de Mathématiques (8 час. математики в неделю) и Classe de Philosophie (1 час математики в неделю). Успешное окончание Classe de Mathématiques еще недостаточно для поступления в ряд высших школ. École Polytéchnique (Политехническая школа), дающая предварительную подготовку для будущих военных инженеров École Centrale des Arts et Manufactures (Центральная школа искусств и промышленности), готовящая гражданских инженеров, и физико-математическое отделение Ecole Normale Supérieure (Высшей нормальной школы), которая выпускает учителей средних школ, — комплектуют состав своих слушателей только на основе приемных испытаний. К этим испытаниям подготовляет для École Polytéchnique, так называемый „Класс специальной математики“ (Classe de Mathématiques Spéciales), для успешного посещения которого следует сначала пройти „Подготовительный класс специальной математики“ (Classe de Mathématiques Spéciales préparatoire) (несколько таких классов имеется прежде всего в Париже). К поступлению в École Centrale готовят другие классы, которые называются Classes de Centrale. Учебный материал этих отделений простирается вплоть до диференциальных уравнений и теории кривых и поверхностей. Еженедельные внеклассные испытания учеников способствуют закреплению пройденного материала. Приемные экзамены в вышеназванных высших школах, особенно в École Polytéchnique, очень трудны. Только минимальному количеству учеников удается выдержать эти экзамены после одного только года работы в Classe de Mathématiques Spéciales. Большинство же посещают этот класс в течение двух или даже трех лет.

Что касается французских учебных планов по математике для средних школ, то подробности можно прочесть в отчете для Imuk, составленном Руссо (Th. Rousseau) [1]. Упомянем только об одном моменте, касающемся расположения материала, так как в этом французские учебные планы принципиально отличаются от немецких. В то время как в Германии математический материал, проходимый в данном классе всегда нов по отношению к пройденному в предыдущем году, во Франции это не всегда имеет место. Как и сама средняя школа, так и учебный материал — во всяком случае поскольку это касается математики — распадаются на три цикла. Каждый последующий цикл имеет задачей не только изучение новых областей, но и проработку пройденного в предыдущем цикле, уже по-иному, в соответствии с бо́льшей зрелостью учеников. Такое расположение можно назвать расположением по концентрическим кругам; в методическом отношении

[1]) Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique. Sous-Commission Francais. Rapports. Volume II. Enseignement Secondaire. Publié sous la direction de M. Ch. Bioche, Paris 1911, стр. 76—117.

в самом внутреннем кругу господствует интуиция, а в последующих все больше вступает в свои права дедукция. В широко распространенном и прекрасном „Учебнике Геометрии" Адамара (J. Hadamard) [1]), который написан для Classe de Mathématiques, изложен весь курс геометрии с самого начала, а не только те части, которые являются новыми для этого класса. Но зато вещи, уже ранее известные ученикам этого класса, получают здесь чрезвычайно широкий размах, притом в более высоком роде, чем это было доступно предыдущему возрасту.

Влияние Мерэ (Mèray) на преподавание геометрии во Франции. Книга Мерэ, о которой мы уже подробно говорили, оказала неоспоримое влияние на преподавание геометрии во Франции. Учебные планы 1905 г., года появления третьего издания книги Мерэ, содержат следующее место: „Un appel constant á la notion de mouvement semble devoir faciliter l'enseignement de la géométrie ; c'est ainsi que le parallélisme sera lié à la notion expérimentale de translation, que l'étude des droites et des plans perpendiculaires résultena de la rotation l'idée d'égalité sera liée à celle du transport des figures, que l'on precisera en introduisant la notion simple d'orieotation" [2]). Но и возражения против Мерэ были велики; в основе их лежали различные причины. В отношении языка его изложение тяжеловесно и не отличается той ясностью и изяществом, которую мы часто находим в других французских учебниках математики.

Многие, далее, не могли привыкнуть к тому, что во главу геометрии должны быть поставлены иные аксиомы, чем те, которые отчетливо высказаны Евклидом. Наконец, многие из тех, кто охотно соглашается с основной мыслью Мерэ — положить в основу геометрии свойства движений, не могли примириться со слиянием (Fusion) планиметрии

---

[1]) „Lecons de géométrie élémentaire", т. I, 8-е изд., 1924; т. II, 4-е изд. 1921.

[2]) „Постоянное обращение к интуиции должно, повидимому, облегчить обучение геометрии; этим именно путем параллелизм можно будет увязать с полученным из опыта понятием смещения, а учение о перпендикулярных прямых и плоскостях получится из вращения; идея равенства будет поставлена в связь с идеей переноса фигур, которую можно уточнить, вводя простое понятие направленности".

и стереометрии. Но наиболее тяжелым был упрек, направленный против Мэре, в том, что он придавал слишком малое значение количеству аксиом. За этот пункт ухватывается Бурлэ (C. Bourlet, ср. стр. 373). Он привлекает понятия группы и преобразования и указывает на то, что основная мысль в теории сдвигов Мерэ может быть представлена в такой простой форме: группа сдвигов является инвариантной подгруппой [1]) главной группы движений. Стоя на такой точке зрения, Борель (E. Borel) и Бурлэ написали учебники, в которых построение Мерэ упрощено, при более отчетливой разработке его основной мысли. Более радикальными являются предложения Руссо в названном выше отчете для Imuk. Он требует полного отказа от Евклида и неограниченного господства идеи преобразований. Для учебников геометрии и для начального преподавания математики он предлагает следующее расположение материала:

1. Начало должно составиться из понятий и из теорем, относящихся к геометрии наиболее общих однозначных точечных преобразований, т. е. к Analysis Situs. При этом имеется в виду, конечно, Analysis Situs, базирующийся на опытных данных. Здесь следует, по мнению Руссо, говорить о таких понятиях, как понятие тела, поверхности, линии, „внутри“ и „вне“, пересечения, связности. Ничто, как думает Руссо, не препятствовало бы тому, чтобы обратить внимание учеников на такие проблемы, как задача о мостах и островах, о четырех красках, о количестве сторон поверхности.

2. На втором месте стояло бы изучение движений вообще и, в частности, вращений с их приложениями: прямая линия, перпендикулярность, сложение вращений, плоскость, круг, симметрия, геометрия пучка лучей. Сюда

---

[1]) Подгруппа g группы G называется инвариантной, если при определенном процессе сложения (сочетания) какого-либо преобразования T, взятого из g, (т. е. принадлежащего подгруппе g) с каким-либо преобразованием S, взятым из G, снова получается некоторое преобразование, принадлежащее g (группа инвариантна по отношению к соответствующему процессу). Этот процесс, если S^{-1} есть обратное преобразование по отношению к S, определяется так: образуем произведение $S^{*} S^{-1}T$ и затем $S^{*}S$, что равнозначно с $S^{-1}TS$. Преобразование $S^{-1}TS$ должно принадлежать к группе g.

относились бы все свойства, которые общи неевклидовым и евклидовой геометриям. Действительно, в этой части геометрии мы еще не пользуемся тем фактом, что группа движений имеет инвариантную подгруппу.

3. Третья группа была бы посвящена сдвигам и их применениям: параллелизм, метрические отношения.

4. В четвертой части изучались бы другие группы преобразований, каковы группа преобразований подобия, группа преобразований посредством обратных радиусов.

Требуемое здесь подразделение принципиально не противоречит основным положениям педагогики. Каждая из четырех названных геометрий содержит наряду с трудными проблемами также и очень простые, а расположение материала по концентрическим кругам здесь в такой же мере возможно, как и при традиционном построении геометрии. Прежний способ изложения геометрии, который ведет свое начало от Евклида, разделяет материал в сущности по фигурам (прямая, треугольник, четыреугольник, круг, плоскость, пространственные фигуры). Во многих учебниках эта более старая точка зрения перемешана с только что описанной.

Одним из наиболее ранних немецких учебников, в которых руководящей служит точка зрения преобразований, является книга Бретшнейдера (C. A. Bretschneider) „Курс низшей геометрии" („Lehrgebände der niederen Géométrie", Jena 1844), написанная под влиянием работ Мёбиуса и предназначенная для преподавания в гимназиях и реальных школах. В этом учебнике устранено обычное деление на планиметрию и стереометрию, а вместо него введено следующее подразделение.

1. Синтетическая геометрия.
   a) Геометрия положения.
   b) Геометрия формы.
   c) Геометрия меры.
2. Аналитическая геометрия:
   a) Гониометрия.
   b) Тригонометрия.
   c) Координатная геометрия.

Точно так же на понятии преобразования базируется упомянутый уже на стр. 396 „Учебник элементарной геометрии" Генрици и Тройтлейна.

[3. Италия]

По декрету бывшего министра Джентиле от 6 мая 1923 г. путь к высшей школе ведет либо через трехлетний Liceo classico (Классический лицей), либо через четырехлетний Liceo scientifico (Научный лицей). В Liceo classico поступают по приемным экзаменам после четырех лет народной школы и пяти лет гимназии. Для поступления в Liceo scientifico достаточно при том же сроке обучения в народной школе еще четырех лет гимназии или четырех лет обучения в какой-нибудь другой средней школе.

Такими средними школами являются дополнительные школы, которые соответствуют приблизительно прусским Mittelschulen (средним школам) и младший курс (концентр) Istituto tecnico (техникума), задачей которого является подготовка среднего технического персонала. Насколько сильно Джентиле урезал в Италии математику и естествознание, можно видеть из следующих данных, которые мы заимствуем из цитированного уже на стр. 420 издания итальянского министерства просвещения. В гимназии на математику отводится, если итти от младших классов к старшим (счет, т. е. начальная арифметика, особо не выделяется), 1, 2, 2, 2, 2 часа; на физику, химию и биологию не дается ни одного часа. В Liceo classico на математику и физику, вместе взятые, дается 4, 4, 5 часов, на химию и биологию, тоже вместе взятые 3, 2, 3 часа. Зато на историю и географию вместе отводится в гимназии 5. 5, 4, 3, 3 урока, а в Liceo classico на одну только историю 3, 3, 3 часа, на философию и гражданское право тоже 3, 3, 3 и на историю искусств 2, 2. Общее число часов по научным предметам колеблется в гимназии между 21 и 24, а в Liceo classico между 25 и 26 в неделю. В Liceo scientifico, в котором естественно-математический элемент должен быть особенно подчеркнут, на математику и физику вместе отводится 5, 5, 6, 6 часов, на философию и гражданское право 4, 4, на историю 3, 3, 2, 2, на биологию, химию и географию также 3, 3, 2, 2 часа: Младший курс (концентр) Istituto tecnico имеет для математики, включая счет, 2, 2, 4, 4 часа, но ни одного часа, как и в гимназиях, для физики, химии и биологии. В вышеупомянутом „Сборнике“ (Raccolta) нет учебных планов. Сказано только, что требуется на отдельных испытаниях. Как о характерном новшевстве следует упомянуть, что в Liceo scientifico на уроках философии и гражданского права, которые как правило, не находятся в руках естественника, кроме указанных в названии областей, должны излагаться также история математики и естествознания. Соответствующее место, указывающее учебную цель (Raccolta, стр. 369) в свободном переводе гласит так: проблема математики и естествознания в ее историческом развитии. Естествознание древних (математика, физика, химия, астрономия). Средневековое естествознание. Естествознание в эпоху Ренессанса и натурализма (Телезий, Кампанелла, Коперник, Джильберт). Великий вопрос птоломеевой и коперниковой системы мира (Галилей). Проблема научного метода (Бэкон, Декарт). Современное естествознание. Новые теории естествознания (Кроче[1]), Максвелл, Мах, Пуанкаре).

Очень подходящий для этого преподавания учебник „Страницы из истории науки“ („Pagine di Storia della Scienza“) недавно издал Джино Лориа (Gino Loria)[2]). Из новых итальянских учебников, предназначенных для преподавания геометрии в средних школах мы имеем под руками два. Один из них составили Бурали-Форти (C. Burali Forti) и Марколонго (R. Marcolongo), предназначая его для старшего концентра (двухлетнего) в Istituti tecnici[3]); другой написал Предела (G. Predella) для употребления в лицеях[4]). Невозможно, конечно, по характеру этих двух книг судить с уверенностью о типичных чертах итальянского преподавания, но мы упоминаем о них, так как они выдвигают новые точки зрения по сравнению с ранее упоминавшимися. Первая из этих книг при изложении геометрии постоянно пользуется понятием вектора. Названия глав следующие: Общие сведения о векторах; Сумма двух векторов, произведение вектора на вещественное число; Скалярное произведение двух векторов; Вращения, включая такой параграф: оператор

---

1) Бенедетто Кроче — известный итальянский философ-идеалист.

2) Вышла в Biblioteca Paravia, „Storia e Pensiero“ („История и Мысль“

3) Corso di Matematica pel Secondo Bionnio degli Istituti Tecnici vol. II Geometria, Firenze.

4) Geometria ad uso dei licei, G. B. Paravia, Torino—Milano.

(вращение на прямой угол); круговые функции; прямолинейная тригонометрия; векторное произведение; сферическая тригонометрия; конические сечения; различные вопросы (понятие степени точки по отношению к окружности, преобразования посредством обратных радиусов и т. д.). В предисловии к книге составители говорят следующее: теперь векторы имеют всеобщее применение в университетском преподавании; они подчиняются алгорифму, который подобен употребляемому в алгебре и столь же прост, как этот последний; они геометрически столь наглядны, несмотря на свой алгебраический алгорифм, что не должны остаться неизвестными ученикам старшего курса средних школ.

Нам книга эта представляется слишком перегруженной формулами и чересчур абстрактной. Последнее частью относится в еще большей мере к учебнику геометрии Пределла. Она начинается с главы, в которой изложены со всей строгостью понятия величины, верхней границы, иррационального числа, которые применяются потом к некоторым теоремам планиметрии. В дальнейшем изложении книга не выходит за пределы простейших стереометрических фактов, что обусловливается, повидимому, небольшим количеством уроков, отведенных на математику.

На стр. 376 мы говорили о фузионизме в преподавании стереометрии и планиметрии, как об особенно распространенной в Италии идее. Но эта характеристика целиком и полностью не соответствует более современному положению вещей. Уже во время дебатов на конгрессе Imuk в Милане в 1911 г. стало ясным, что фузионистские стремления отошли в Италии совершенно на задний план. Это пришлось констатировать как раз в тот момент когда Тройтлейн (P. Treutlein) пытался возбудить в Германии интерес к фузионистским идеям своим переводом [1]) фузионистского Standard Work (нормального учебника) итальянцев, а именно, книги „Elementi di Geometria [2]) Lazzeri и Bassani.

[1]) Lazzeri und Bassani, Elemente der Geometrie, deutsch von Treutlein, Leipzig 1911.

[2]) 1-е изд., Livorno 1891; 2-е изд., 1898.

4. Германия

(О дальнейшем разви[illegible] прусской школьной реформы)

Уже в первом томе говорилось об истории преподавания математики в Германии, в особенности же о том положении, какое заняли математика и естествознание после проведения прусской реформы преподавания 1924 г. [1]). Одна из центральных мыслей этой реформы, как она первоначально была задумана, требует развития четырех совершенно различных типов средней школы, каждый из которых должен обслуживать отдельную сторону культурной жизни.

Классическая гимназия (с древними языками) должна ставить в центр своего преподавания установление связи между немецкой и античной культурой. Реальная гимназия имеет целью изучение современной европейской культуры и может быть охарактеризована как гимназия новых языков, так как новые иностранные языки являются ее главнейшими предметами. Руководящая роль математическим и естественно-научным предметам отводится в высших реальных училищах (Oberrealschule).

От них кроме выполнения чисто специальных задач требуется в особенности изучение культурного значения математики и естествознания. Наконец, задача „Немецкой старшей школы" (Deutsche Oberschule) состоит в том, чтобы дать понимание немецкой культуры: немецкий язык, история и география являются предметами, которым в ней должна принадлежать доминирующая роль.

Требование „чистоты школьных типов" отразилось для математических и природоведческих предметов в том, что в таблицах числа уроков, предложенных первоначально прусским министерством просвещения, эти специальности в большой степени утратили свое значение во всех школах, кроме Oberrealschule. Чтобы правильно оценить значение такого оттеснения этих специальностей для подготовки инженеров и медиков и для естественно-математического образования представителей других профессий, необходимо знать, что количество

[1]) Ср. т. I, стр. 411 и сл.

Oberrealschulen в Пруссии еще очень незначительно, причем о планомерном увеличении их числа никто не думает, а преподавание в многочисленных реальных гимназиях, имевшее до сих пор значительный математико-естественный уклон, теперь должно было его утратить.

Борьба, которая завязалась с самых различных сторон против прусской школьной реформы, имела результатом то, что произошли изменения в распределении уроков в направлении ослабления тенденции к типизации. В классических и реальных гимназиях естественно-математическое преподавание было несколько усилено, но в Oberrealschulen пришлось примириться с некоторым его ослаблением. Мы не можем входить в детальный разбор этих вещей и отметим только следующее:

1. Ни в одной средней школе число часов, отведенных на естественно-математические предметы, не достигает той высоты, на какой оно стояло до реформы. О выполнении требований пересмотренных меранских учебных планов по отношению к числу уроков не может быть и речи.

2. Наибольший ущерб среди естественных наук испытала при прусской реформе биология. Возможно, что в таком невнимательном отношении к этой науке сказалось влияние мотивов, основанных на мировоззрении, которое давно оставлено позади современным развитием науки.

3. Если сравнить в отношении организации (а не в отношении духа, господствующего в преподавании и воспитании) прусское среднее образование с английским и французским, то приходится констатировать при переходе от Англии через Францию к Пруссии все меньшее и меньшее учитывание индивидуальности ученика. В Англии мы находим наибольшую свободу в организации, ради интересов учащихся. Во Франции три раза, а именно при вступлении в каждый из трех циклов, предоставляется возможность выбора того типа школы, который наиболее соответствует характеру дарований и интересам ученика. В Пруссии же ученик, как правило, а именно, если он живет в небольшом городе с одной только мужской средней школой, связан с односторонним типом школы своего родного места.

4. Недавно появились новые директивы к учебным планам прусских средних школ[1]).

Высказанное нами в первом томе предположение, что в них будут полностью учтены основные мысли реформы преподавания математики, подтвердилось: не считая некоторых отклонений, новые прусские учебные планы в части, касающейся математики, находятся в согласии с пересмотренными меранскими учебными планами. Поэтому в будущем во всех прусских средних школах функция явится центральным понятием в преподавании математики, и во всех них должны будут обучать начаткам исчисления бесконечно малых. Развитие пространственной интуиции выдвигается на первый план, истории математики приписывается принципиальное значение, и надлежащее внимание должно быть обращено на приложения. Геометрическое черчение должно входить как существенная составная часть в преподавание математики; вся начертательная геометрия включается в него. Как ни достойно приветствия последнее требование, но является все же большим вопросом, не останется ли оно, по причине недостаточности предоставленного времени в значительной части на бумаге.

5. В методической установке прусских учебных планов особо важную роль играют два требования: трудовое обучение и концентрация (Der Arbeitsunterricht und die Konzentration). Что следует понимать под трудовым (или рабочим) преподаванием, мы пытались охарактеризовать при разборе английского учебника Давида Майра. В Германии этот метод преподавания, преследующий возможно большую самодеятельность учеников, преимущественно связывается с именами Гаудига (Gaudig) и Кершенштейнера (Kerschensteiner). Под концентрацией понимают устранение того, что несколько учебных предметов проходятся одновременно, но без всякой связи между ними, и введение сознательной совместной проработки их рука об руку, в окончательном итоге, — такая установка всего преподавания, которая была бы направлена на осуществление образовательной цели школы. На тесную связь,

[1]) Richtlinien für die Lehrpläne der höheren Schulen Preussens, Teil I u. II, herausgegeben von Ministerialrat, Richert, Berlin 1925, Weidmannsche Buchhandlung.

существующую между тенденцией этого моего труда и требованием концентрации мы уже указывали раньше[1]). Но при этом утрировка этого требования, физически имевшая место в прусской школьной реформе, была решительно (нами) отклонена, ввиду невозможности соответствующей подготовки учителей.

В прусских директивах относительно математики сказано: „Следует стремиться к установлению возможно большего числа связей между математикой и остальными предметами преподавания". Для движения в пользу реформы преподавания математики мысль о концентрации, выраженная в такой форме, не представляет ничего нового; напротив, все направленные к реформе стремления давно были проникнуты этой мыслью. Он проявляется в них прежде всего под именем фузионизма в требовании целесообразного сочетания отдельных частей математики. В тесной связи с этим находится убеждение в том, что центральные понятия, пронизывающие всю математику, как, например, понятие функции, преобразования и группы, должны являться также и в школьном преподавании объединяющим началом. Наконец, и постоянно повторявшееся реформистским движением требование включения приложений математики имеет тот же смысл, что и цитированное выше требование. Поэтому понятно, что учителя математики, желающие согласовать свое преподавание с требованием концентрации, могут опереться на обширную литературу. Кроме уже цитированных в первом томе этого сочинения статей немецкой подкомиссии Imuk, из которых соотношениям между математикой и соседними областями в особенности посвящены статьи третьего тома, и кроме той части издания „Культура нашего времени" („Kultur der Gegenwart"), редактированной Ф. Клейном, которая посвящена оценке культурного значения математики, упомянем еще о следующих изданиях:

a) Лекция Р. Шиммака (R. Schimmak), прочитанная при получении звания доцента, „О слиянии различных ветвей в преподавании математики" („Über die Verschmelzung verschiedener Zweige des mathematischen Unterrichts"), напечатанная в 7-ой тетради 1-й серии „Отчетов и сооб-

---

[1]) Том I, стр. 412 и сл.

щений, сделанных по поручению международной комиссии по преподаванию математики" (Leipzig 1917).

b) Большинство томиков издаваемой Лицманом и Виттингом физико-математической библиотечки (W. Lietzmann und A. Witting, Verlag Teubner, Leipzig).

c) Сальковский (E. Salkowski), Понятие группы как классификационный принцип в преподавании геометрии (Der Gruppen begriff als Ordnungsprinzip des geometrischen Unterrichts, Beiheft 7 zur „Zeitschrift für mathematischen uno naturwissenschaftlichen Unterricht", Leipzig 1924).

d) Шефферс и Крамер (G. Scheffers und W. Kramer), Руководство начертательной и пространственной геометрии (Leitfaden der darstellenden und räumlichen Geometrie, I Teil, für Unterterzia bis Untersecunda, Leipzig, Quelle und Meyer, 1924; II Teil für Obersecunda bis Oberprima, 1925).

Это сочинение исходит из той мысли, что для выработки возможно лучшего пространственного представления необходимо более планомерное и более раннее фузионирование планиметрии и стереометрии, чем это до сих пор имело место. Переходя же к осуществлению этой фузионистской идеи, вскоре наталкиваемся на необходимость вычерчивать пространственные построения и изображать тела на плоскости. Поэтому фузионирование „планиметрия-стереометрия" побуждает к еще более широкому фузионированию, охватывающему также и начертательную геометрию. Но, по мнению Шефферса, метод проектирования на две плоскости и параллельная перспектива сравнительно трудны для понимания и годятся только для более зрелых учеников. Зато достаточно простым он считает метод проекций с числовыми отметками (или метод одной плоскости проекций), применяемый при всякой мензульной съемке. При этом методе положение всякой точки, фиксируется ее планом, т. е. ее проекцией на плоскость чертежа, предполагаемую горизонтальной, и числом, указывающим высоту точки над плоскостью чертежа. Этот прием Шефферс делает еще более наглядным тем, что он отмечает высоты не числами, а посредством отрезков, которые надо брать с масштаба высот, имеющегося при чертеже. Конечно, в названном руководстве разбираются и другие приемы начертательной геометрии. Составители новых прусских учебных планов усвоили точку зрения Шефферса и требуют введения метода одной плоскости проекций в классах Unter- и Obertertia (4-й и 5-й классы 9-летней гимназии).

6. Новые учебные планы требуют для классов Sexta и Cuinta (1-й и 2-й классы) пропедевтически-наглядного изучения пространственных форм, а в классе Quarta (третьем) — черчения контуров простых тел и их проекций на одну плоскость. Для соответствующего преподавания учителям принесут большую пользу следующие два сочинения:

a) Сложившаяся на основе зрелого педагогического опыта книга Тройтлена (P. Treutlein) „Наглядное преподавание геометрии как низшая ступень двухступенного преподавания геометрии в наших средних учебных заведениях“, 1911 [1]).

b) Весьма интересное, пересыпанное многими историческими и культурно-историческими соображениями, сочинение Тимердинга (H. E. Timerding) „Воспитание наглядного представления“ (1912) [2]).

7. В заключительной главе на стр. 396 был упомянут учебник геометрии Тройтлейна и Генрици. С тех пор появилось большое количество новых учебников, учитывающих основные идеи движения за реформу преподавания. Назовем из них следующие два:

a) Берендсен и Геттинг (Behrendsen und Götting), Учебник математики, построенный на современных принципах (Lehrbuch der Mathematik nach modernen Grundsätzen, Verlag Teubner, Leipzig), начиная с 1908 г. во многих изданиях.

b) „Курс обучения математике для средних мужских учебных заведений, изданный Лицманом при участии Фишера, Циндлера и Цюльке“ („Mathematisches Unterrichtswerk für höhere Knabenschulen, unter Mitwirkung von P. B. Fischer, T. Zindler und P. Zühlke, herausgegeben von W. Lietzmann, Verlag Teubner, Leipzig).

Часть, предназначаемая для младшей ступени, вышла многими изданиями, начиная с 1916 г., а часть, предназначаемая для старшей ступени, начиная с 1920 г.

---

[1]) „Der geometrische Anschaungsunterricht als Unterstufe eines zweistufigen geometrischen Unterrichts an unseren höheren Schulen“, Leipzig 1911

[2]) „Die Erziehung der Anschauung“, Leipzig 1912.

ИМЕННОЙ УКАЗАТЕЛЬ

ИМЕННОЙ УКАЗАТЕЛЬ (иностранный)

Редакция И. Я. Акушского. Оформление В. Ф. Зазульской.
Корректура Н. А. Деминой. Наблюдал за выпуском Л. М. Волкович.

Сдано в производство 20 февраля 1934 г. Подписано к печати 27 августа 1934 г.
Тираж 10 000. Формат 82 × 111. Количество бум. листов 6 3/32.
Авторских листов 21,2. Количество печ. знаков в 1 бум. листе 139 072.
Заказ № 259. ГТТИ № 301. Уполномоченный Главлита № В—73 443.

4-я тип. ОНТИ НКТП СССР „Красный Печатник“. Ленинград, Международный, 75а.

РЕДАКЦИОННЫЕ ИСПРАВЛЕНИЯ

Стр.	*Строка*	*Напечатано*	*Должно быть*
17	1 снизу	$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \\ x_4 & y_4 & z_4 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix}$
88	9 снизу	$x_2 = 0$	$y_2 = 0$

Ф. Клейн. Элементарная математика.